1.3.D Spazi localmente euclidei.

Definizione 1.14 *Uno spazio topologico* $(X, \mathcal{T})$ *è detto* localmente euclideo di dimensione n *se esistono un intero positivo* n *e, per ogni punto* $x \in X$*, un intorno* U *di* x*, un aperto* $\widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ *ed un omeomorfismo* $\phi : U \to \hat{U}$*.*

Illustreremo questa proprietà più avanti, quando parleremo delle varietà. Ci limitiamo ad osservare che i sottoinsiemi (con la topologia relativa) di uno spazio loclamente euclideo sono localmente euclidei. E che, inoltre, il fatto che l'essere localmente euclideo, e di quale dimensione, siano invarianti topologici segue da un (profondo) risultato di Brower, secondo il quale se un aperto di $\mathbb{R}^n$ è omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^m$ allora necessariamente $n = m$.

1.3.E Base numerabile.

Definizione 1.15 *Uno spazio topologico è* a base numerabile *(*second countable*, in inglese) se esiste una base numerabile della topologia.*

Esempi 1. $\mathbb{R}^n$ è a base numerabile (infatti, le palle aperte di centri e raggi razionali formano una base).

2. Uno spazio metrico è a base numerabile se e solo è separabile, cioè possiede un sottoinsieme denso numerabile (da non confondere con Hausdorff).

3. Prodotti e sottospazi di spazi a base numerabile sono a base numerabile.

L'esistenza di una base numerabile ha conseguenze rilevanti. Per esempio:

Proposizione 1.16 *Se* $(X, \mathcal{T})$ *ha base numerabile, allora:*

i. I punti nella chiusura $\overline{S}$ *di un sottoinsieme* S *sono esattamente i limiti delle successioni convergenti contenute in* S*.*

ii. Un sottoinsieme S *di* X *è chiuso se e solo se ogni successione contenuta in* S *ha tutti i suoi punti limite in* S*.*

iii. Ogni ricoprimento aperto ha un sottoricoprimento numerabile.

iv. Se X *è anche Hausdorff, allora i sequenzialmente compatti ed i compatti coincidono.*

1.3.F Paracompattezza. La paracompattezza della topologia svolge un ruolo importante nella teoria delle varietà differenziali, perché è alla base dell'esistenza delle "partizioni dell'unità", uno strumento utilissimo. Diamo innanzitutto la definizione, nella quale compaiono termini che spieghiamo poi.

Definizione 1.17 *Uno spazio topologico X è* paracompatto *se ogni ricoprimento aperto ammette un raffinamento localmente finito.*

Un *raffinamento* $\mathcal{R}$ di un ricoprimento $\mathcal{S}$ è un ricoprimento tale che ogni elemento di $\mathcal{R}$ è contenuto in un elemento di $\mathcal{S}$.

Un ricoprimento di X è *localmente finito* se ogni punto di X ha un intorno che interseca al più un numero finito di aperti del ricoprimento.

Come esempio, gli aperti $(-n, n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, coprono $\mathbb{R}$, ma questo ricoprimento non è localmente finito (ogni intorno di 0 li interseca tutti). Invece, gli aperti $(k-1, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, formano un ricoprimento localmente finito di $\mathbb{R}$. Essi sono un raffinamento del precedente perché ciascun intervallo $(k-1, k+1)$ è contenuto in (almeno) un intervallo $(-n, n)$.

Anche la paracompattezza è un invariante topologico.

> **Osservazione:** Le varie proprietà topologiche viste in questa sezione svolgono, nello studio delle varietà differenziabili, ruoli diversi. Da un lato, si incontrano varietà connesse o meno e compatte o meno. Invece, la topologia di tutte le varietà differenziabili deve avere le altre "buone" proprietà introdotte qui. Esse sono legate fra loro, peraltro. Per esempio un spazio Hausdorff e localmente euclideo è a base numerabile se e solo se è paracompatto e ha al più un'infinità numerabile di componenti connesse.

1.4 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi

Esercizi 1.1.1

(i) $\cap_{n\in\mathbb{Z}_+} B_{1+\frac{1}{n}}(0) = \cap_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$ è l'intervallo chiuso $[-1, 1]$.

(ii) Tutti. Rifletterci: non si sta chiedendo se sono sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}$, ma se sono aperti come spazi topologici con la topologia relativa: non solo ogni spazio topologico è aperto relativamente alla sua topologia, ma, per esempio, $[0, 1)$ è aperto nella topologia relativa perché $= [0, 1) \cap (-1, 1)$.

(iii) Nella topologia di $\mathbb{R}^2$ è aperto solo S_2. In quella relativa, oltre a S, anche S_1 e S_2.

Esercizi 1.1.2

(i) Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ allora $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$ e dunque per ogni $p \in B_1 \cap B_2$ esiste $B \in \mathcal{B}$ che contiene p ed è contenuto in $B_1 \cap B_2$. Dunque $\mathcal{B}$ è una base per X. Inoltre, ogni

elemento di $\mathcal{T}$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$ (perché per ogni $A \in \mathcal{T}$ e $p \in A$ esiste $B_p \in \mathcal{B}$ tale che $p \in B_p \subseteq A$ e dunque $A = \cup_{p \in A} B_p$) e dunque la topologia generata da $\mathcal{B}$ coincide con $\mathcal{T}$.

(ii) Le palle aperte sono aperti della topologia metrica.

(iii) Basta provare che ogni palla aperta centrata in un punto p contiene una palla aperta di raggio razionale e centro con coordinate razionali che contiene p.

(iv) Mostrare che ogni prodotto di intervalli aperti contenente un punto contiene una palla aperta centrata in quel punto, e viceversa.

Esercizi 1.1.3

(i) X è il complementare di $\emptyset$, che è aperto, e viceversa.

(ii) Usare le "Leggi di De Morgan".

(iii) Sì, la discreta.

(iv) No. Per esempio, non se X ha la topologia banale ed è costituito da più di un punto, perché allora $X \setminus \{p\} \neq X, \emptyset$.

(v) Nella topologia banale c'è un unico intorno ed esso contiene tutti i punti.

(vi) Sí, sí (si pensi all'esercizio precedente).

(vii) Quelle "definitivamente costanti", cioè $p_n = p^*$ per tutti gli $n \geq$ di un qualche $N > 0$.

Esercizi 1.2.1

(v) $f(U) \subseteq V$ perché in V potrebbero esserci punti che non appartengono all'immagine di f.

Esercizi 1.2.2

(iii) $g \circ f$ è continua ed è invertibile con inversa $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ pure continua.

(iv) Ovviamente $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, $f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f = f$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$.

Esercizi 1.3.1

(i) Sì, perché sono chiusi (sono le preimmagini sotto una funzione continua dei singoletti in $f(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}$, e in $\mathbb{R}$ i singoletti sono chiusi) e, per ipotesi, limitati.

(ii) No: la base di una topologia è un ricoprimento aperto dello spazio, ma una sua sottofamiglia finita, pur se un ricoprimento, potrebbe non essere più una base. Del resto, se una topologia ha una base finita allora ha un numero finito di aperti. Per esempio, $[0, 1]$ non ha una base finita.

(Version 2026.1)

Capitolo 2

Varietà differenziabili

2.1 Varietà topologiche

Anche se il nostro scopo è lo studio delle varietà differenziabili è conveniente introdurre prima le varietà topologiche, perché questo facilita la comprensione di cosa sia una struttura differenziabile.

2.1.A Definizione.

Definizione 2.1 *Una* varietà topologica di dimensione $n \in \mathbb{N}$ *è uno spazio topologico* $(M, \mathcal{T})$ *che è*

i. Localmente euclideo di dimensione n

ii. Hausdorff

iii. A base numerabile.

Il fatto che M sia localmente euclideo di dimensione n significa che per ogni punto $p \in M$ esistono un intorno U di p in M, un aperto $\widehat{U}$ in $\mathbb{R}^n$ ed un omeomorfismo $\phi : U \to \widehat{U}$. A questo proposito, è conveniente introdurre la seguente terminologia.

Definizione 2.2 *Una* carta insiemistica di dimensione n *su un insieme* X *è una biiezione* $\phi : U \to \widehat{U}$ *fra un sottoinsieme di* X *ed un aperto di* $\mathbb{R}^n$.

Dunque, in una varietà topologica M, ogni punto appartiene al dominio di una carta insiemistica $\phi : U \to \widehat{U}$ di dimensione n che è un omeomor-

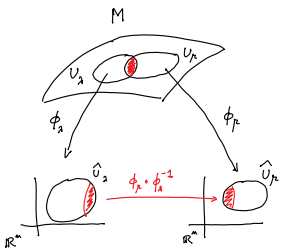
fismo. Le chiameremo *carte* e le denoteremo (U, ϕ) (poi $\widehat{U} = \phi(U)$). Siccome ogni punto di M appartiene al dominio di una carta vi è certamente una famiglia

$$\mathcal{A} = \{(U_\lambda, \phi_\lambda) \,:\, \lambda \in \Lambda\}$$

(con Λ un qualche insieme di indici) i cui domini $U\lambda$ coprono M. Ogni tale famiglia di carte si chiama *atlante (topologico)* di M. Ovviamente una varietà topologica puo' avere più atlanti. E se M non è omeomorfa ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ allora non esiste alcun atlante formato da una sola carta; questo avviene sempre, in particolare, se $n > 0$ ed M è compatta (perché gli aperti non vuoti di $\mathbb{R}^n$ non lo sono).

In ogni carta le componenti ϕ^i_λ di $\phi_\lambda = (\phi^1_\lambda, \dots, \phi^n_\lambda)$ si chiamano *funzioni coordinate* della carta $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ e, per ogni $p \in U_\lambda$, $(\phi^1_\lambda(p), \dots, \phi^n_\lambda(p)) \in \mathbb{R}^n$ sono le *coordinate* di p nella carta considerata (a volte le si denotano $(x^1, \dots, x^n)$ o simili; a volte anche le funzioni coordinate vengono denotate $(x^1, \dots, x^n)$ o simili). Il motivo per cui l'indice $i = 1, \dots, n$ nelle funzioni coordinate è scritto in alto è legato ad una convenzione generale che vedremo più avanti.

L'inversa $\phi^{-1} : \widehat{U}_\lambda \to U_\lambda$ si chiama *parametrizzazione locale* di M.



Se $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ e (U_μ, ϕ_μ) sono due carte di M i cui domini hanno intersezione non vuota, $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$, allora $\phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ e $\phi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ sono aperti di $\mathbb{R}^n$ e la mappa

$$\phi_\mu \circ \phi_\lambda^{-1}|_{\phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)} : \phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \phi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)\,, \tag{2.1.1}$$

che si chiama la *funzione di transizione* fra le due carte, è un omeomorfismo fra aperti di $\mathbb{R}^n$. Le funzioni di transizione giocheranno un ruolo centrale nella definizione di varietà differenziabile.

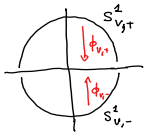
Esempi Ci limitiamo a pochissimi esempi, perché altri ne vedremo quando parleremo delle varietà differenziabili.

1. Ogni aperto $\hat{U}$ di $\mathbb{R}^n$ è una varietà topologica di dimensione n. Infatti la topologia relativa di $\mathbb{R}^n$ ha le tre proprietà richieste e una carta (globale) è data dall'identità $\mathrm{id} : \hat{U} \to \hat{U}$. Più in generale ogni spazio topologico omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ è una varietá topologica di dimensione n e ha un atlante formato da un'unica carta.

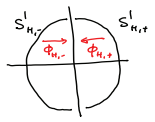
2. *Il cerchio.* Verifichiamo che il cerchio unitario (o sfera unidimensionale unitaria) $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}$, con la topologia relativa, è una varietà topologica unidimensionale. Siccome la topologia relativa è Hausdorff e ha base numerabile, resta solo da verificare che sia localmente euclideo. Questo è piuttosto ovvio, ma, per comprendere meglio il ruolo delle carte etc, puo' essere

utile costruire esplicitamente alcuni atlanti. Siccome S^1 è compatto, servono almeno due carte.

Cominciamo con il costruire un atlante formato da quattro carte. Definiamo i quattro sottoinsiemi di S^1



$$S^1_{V,\pm} := S^1 \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_\pm)\,, \qquad S^1_{H,\pm} := S^1 \cap (\mathbb{R}_\pm \times \mathbb{R})$$



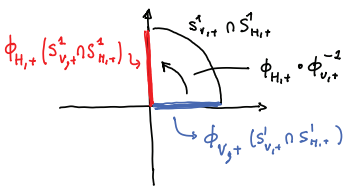
(rispettivamente i semicerchi superiore ed inferiore, destro e sinistro), che coprono S^1, e le mappe

$$\phi_{V,\pm} : S^1_{V,\pm} \to (-1,1)\,, \qquad \phi_{V,\pm}(x,y) = x$$
$$\phi_{H,\pm} : S^1_{H,\pm} \to (-1,1)\,, \qquad \phi_{H,\pm}(x,y) = y\,.$$

Esse sono omeomorfismi. Infatti sono chiaramente biunivoche. La loro continuità si prova osservando che la preimmagine di ogni intervallo aperto di $(-1,1)$ è un arco aperto del cerchio, che è aperto perché intersezione di S^1 con una palla aperta di $\mathbb{R}^2$. La continuità delle inverse di queste mappe si prova o in modo analogo o osservando che esse sono date da

$$\phi^{-1}_{V,\pm}(x) = \left(x, \pm\sqrt{1-x^2}\right), \qquad \phi^{-1}_{H,\pm}(y) = \left(\pm\sqrt{1-y^2}, y\right)$$

e sono chiaramente continue (una funzione a valori in $\mathbb{R}^n$ è continua se e solo se le sue componenti lo sono). A titolo illustrativo determiniamo anche una delle funzioni di transizione, per esempio quella fra le carte $(S^1_{H,+}, \phi_{H,+})$ e $(S^1_{V,+}, \phi_{V,+})$. Innanzitutto, $S^1_{H,+} \cap S^1_{V,+} = \{(x,y) \in S^1 \,:\, x > 0, y > 0\}$ è l'arco del cerchio contenuto nel primo quadrante. Poi $\phi_{V,+}(S^1_{H,+} \cap S^1_{V,+}) = \phi_{H,+}(S^1_{H,+} \cap S^1_{V,+}) = (0,1)$, e

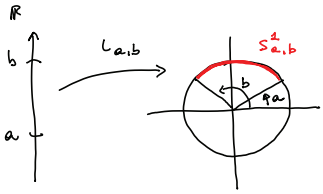


$$\phi_{H,+} \circ \phi^{-1}_{V,+}(x) = \phi_{H,+}\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-x^2} \tag{2.1.2}$$

che, come deve essere, è un omeomorfismo di $(0,1)$ in sè stesso.

Queste carte forniscono parametrizzazioni locali del cerchio con la coordinata della proiezione dei suoi punti su uno degli assi coordinati. Spesso, tuttavia, come coordinata (locale!) sul cerchio si utilizza un angolo, misurato a partire da un qualche punto del cerchio.

Per ogni coppia di reali a, b con $a < b$ consideriamo la funzione



$$\iota_{a,b} : (a,b) \to S^1\,, \qquad \iota_{a,b}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)\,.$$

Geometricamente, $\theta \pmod{2\pi}$ è l'angolo fra il semiasse positivo delle x e il raggio per il punto $\iota_{a,b}(\theta)$. Essa è iniettiva se $b - a \le 2\pi$ e d'ora in poi ci restringiamo a questo caso. Allora la sua immagine $S^1_{a,b} := \iota_{a,b}((a,b))$ è l'arco del cerchio fra gli angoli $a \pmod{2\pi}$ e $b \pmod{2\pi}$ con l'asse x, ed è aperto. L'inversa

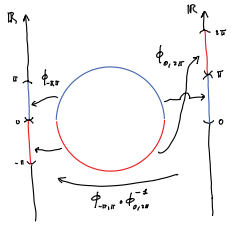
$$\phi_{a,b} := \iota^{-1}_{a,b} : S^1_{a,b} \to (a,b)$$

è una funzione continua ($\iota_{a,b}$ manda archi aperti in intervalli aperti). Le funzioni $\phi_{a,b} : S^1_{a,b} \to (a,b)$ si chiamano *funzioni angolari*, o *angoli*, sul cerchio.

Dunque, per ogni a, b con $0 < b - a \le 2\pi$, $(S^1_{a,b}, \phi_{a,b})$ è una carta per S^1, che usa come coordinata un angolo. Per costruire un atlante servono almeno due di

tali carte, i cui domini coprano S^1, per esempio $(S^1_{0,2\pi}, \phi_{0,2\pi})$ e $(S^1_{-\pi,\pi}, \phi_{-\pi,\pi})$. In ogni componente connessa dell'intersezione dei due domini la funzione di transizione è una traslazione (o l'identità); per la facile verifica, nel caso delle due carte $(S^1_{0,2\pi}, \phi_{0,2\pi})$ e $(S^1_{-\pi,\pi}, \phi_{-\pi,\pi})$, si vedano gli esercizi.

Osservazione: L'essere localmente euclideo descrive la struttura topologica locale di una varietà topologica, che è quella di $\mathbb{R}^n$ (nel senso che è ad essa localmente omeomorfa). Gli altri due requisiti, Hausdorff e base numerabile, pongono invece 'buone' condizioni sulla struttura globale.



Esercizi 2.1.1 *(i) Con riferimento all'esempio 2, verificare che* $S^1_{0,2\pi} \cap S^1_{-\pi,\pi} = S^1 \setminus \{(1,0),(-1,0)\}$*, che*

$$\phi_{0,2\pi}(S^1_{0,2\pi} \cap S^1_{-\pi,\pi}) = (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)\,, \qquad \phi_{-\pi,\pi}(S^1_{0,2\pi} \cap S^1_{-\pi,\pi}) = (-\pi,0) \cup (0,\pi)$$

e che la funzione di transizione

$$\phi_{-\pi,\pi} \circ \phi^{-1}_{0,2\pi} : (0,\pi) \cup (\pi,2\pi) \to (-\pi,0) \cup (0,\pi)$$

manda l'intervallo $(0,\pi)$ *in sè, ed è ivi l'identità, e, con una traslazione di* -2π*, l'intervallo* $(\pi,2\pi)$ *nell'intervallo* $(-\pi,0)$*. [Suggerimento: si veda la figura].*

2.1.B Spazi quoziente. Ci sono importanti varietà topologiche (e in realtà differenziabili) che si costruiscono come spazi quoziente rispetto a certe relazioni di equivalenza.

Una *relazione di equivalenza* su un insieme S è una relazione binaria $\sim$ simmetrica ($x \sim y$ implica $y \sim x$), riflessiva ($x \sim x$) e transitiva ($x \sim y$ e $y \sim z$ implicano $x \sim z$). La *classe di equivalenza* di un elemento $x \in S$ è l'insieme

$$[x] \;:=\; \{y \in S :\; y \sim x\}$$

degli elementi di S equivalenti a x. Ogni elemento $y \in [x]$ è un *rappresentante* della classe di equivalenza. Due classi di equivalenza $[x]$ ed $[y]$ o coincidono (se hanno un elemento in comune) oppure sono disgiunte. Dunque esse definiscono una *partizione* di S (una famiglia di sottoinsiemi a due a due disgiunti la cui unione è S). L'insieme

$$S/\sim \;:=\; \{[x] \;:\; x \in S\}$$

di tutte le classi di equivalenza si chiama lo *spazio quoziente* di S rispetto alla relazione $\sim$. La mappa

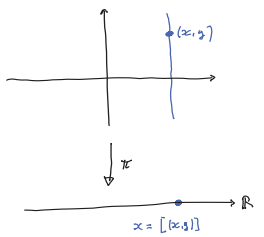
$$\pi : S \to S/\sim\,, \qquad \pi(x) = [x]\,,$$

che ad ogni punto di S associa la sua classe di equivalenza si chiama la *proiezione canonica*.

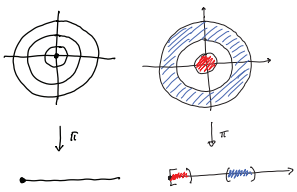
Prendiamo ora in considerazione gli aspetti topologici. Se S è uno spazio topologico allora su $S/\sim$ si può definire la *topologia quoziente* nel modo seguente: $A \subseteq S/\sim$ è aperto nella topologia quoziente se e solo se $\pi^{-1}(A)$ è aperto in S. Con tale topologia sul quoziente, la proiezione canonica è continua.[1]

Lo spazio quoziente è un oggetto astratto e spesso è utile "identificarlo" con uno spazio topologico, ad esso omeomorfo, con il quale sia più facile (o intuitivo) lavorare.[2]

Esempi 1. In $\mathbb{R}^2$ consideriamo la relazione di equivalenza $(x,y) \sim (x',y')$ se e solo se $x = x'$. Le classi di equivalenza sono le rette $x = \text{const}$ e si può individuare univocamente ciascuna di esse con la coordinata x dei suoi punti. Dunque, come insieme, lo spazio quoziente si può identificare con $\mathbb{R}$, e in questa identificazione la proiezione canonica diventa la proiezione sul primo fattore $\pi(x,y) = x$ e la topologia quoziente diventa la topologia standard di $\mathbb{R}$ (infatti, le preimmagini sotto π degli intervalli aperti in $\mathbb{R}$ sono strisce verticali aperte in $\mathbb{R}^2$; propriamente, questo mostra che la topologia di $\mathbb{R}$ è contenuta in quella quoziente; lasciamo il viceversa come esercizio).



2. Consideriamo, in $\mathbb{R}^2$, la relazione di equivalenza $p \sim q$ se e solo se $\|p\| = \|q\|$. Le classi di equivalenza sono i cerchi di centro l'origine e l'origine stessa. Si può individuare ciascun cerchio con il suo raggio. Corrispondentemente, lo spazio quoziente è identificato con il semiasse $[0,+\infty)$ e la proiezione canonica con la mappa $\pi : \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty)$, $\pi(x) = \|x\|$. In questa identificazione, la topologia quoziente coincide con la topologia relativa di $[0,+\infty)$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Infatti, una base di aperti di $[0,+\infty)$ è formata dagli intervalli aperti (a,b) con $0 < a < b$ e dagli intervalli semi-aperti $[0,b)$ con $b > 0$, e le loro preimmagini sotto π sono aperte essendo, rispettivamente, le corone circolari aperte di raggi



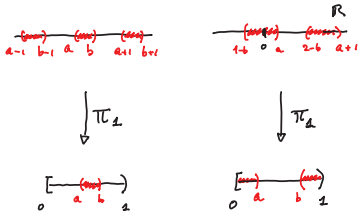
[1] Per chi sa cosa è, è la topologia finale indotta da π.

[2] "Identificare" significa quanto segue. Sia B un insieme e $b : S/\sim \to B$ una biezione. Mediante b si può "trasportare" su B la topologia di $S/\sim$, dichiarando aperti di B tutte e sole le immagini sotto b degli aperti di $S/\sim$. Con questa topologia b è un omeomorfismo (esercizio). Inoltre, $b \circ \pi : S \to B$ è continua e suriettiva e le sue fibre (insiemi di livello) sono le classi di equivalenza di $\sim$. Diciamo allora che abbiamo identificato $S/\sim$ con B mediante b; nell'identificazione π "diventa" $b \circ \pi$. Sottolineiamo che per specificare l'identificazione non basta specificare B, ma bisogna anche specificare la biezione b (se no non si sa quale punto di B corrisponda a quale classe di equivalenza). In alternativa a b si può però specificare la mappa $b \circ \pi$, che determina univocamente b (esercizio: si usa il fatto che è suriettiva e ha per fibre le classi di equivalenza). Faremo così, ma per brevità denoteremo spesso $b \circ \pi$ con il simbolo π. Aggiungiamo che spesso si cerca di scegliere come B uno spazio topologico, con una sua topologia, e di fare in modo che essa coincida con la topologia trasportata da $S/\sim$.

a, b e le palle aperte di raggio b centrate nell'origine. (Anche adesso lasciamo la verifica dell'inclusione opposta come esercizio).

3. *Il toro unidimensionale* $\mathbb{T}^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Questo è l'esempio più importante di questa sezione. Consideriamo la relazione di equivalenza in $\mathbb{R}$ data da $x \sim y$ se e solo se $y - x \in \mathbb{Z}$, ovvero $y = x \bmod 1$. Le classi di equivalenza sono gli insiemi $[x] = \{x + n \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$, $x \in \mathbb{R}$. Lo spazio quoziente si denota $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ o $\mathbb{T}^1$ ed è chiamato *toro unidimensionale*.

Siccome ogni classe di equivalenza $[x]$ ha un unico rappresentante nell'intervallo $[0, 1)$, che è la parte frazionaria $x - \lfloor x \rfloor$ di un qualunque $x \in [x]$ ($\lfloor x \rfloor$ è la parte intera di x), si può identificare $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con l'intervallo $[0, 1)$ con proiezione canonica



$$\pi_1 : \mathbb{R} \to [0, 1)\,, \qquad \pi_1(x) = x - \lfloor x \rfloor\,.$$

Con questa identificazione la topologia quoziente trasportata su $[0, 1)$ non coincide con quella relativa di $[0, 1)$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Infatti, nella topologia quoziente trasportata su $[0, 1)$, ogni intorno di 0 contiene, oltre a un tratto $[0, a)$, anche un tratto $(b, 1)$ per qualche $b < 1$. (In questo senso, i punti prossimi a 1 sono anche "vicini" a 0; questo è precisamente un effetto del fatto che, nel quoziente, 0 e 1 sono identificati perché differiscono per un intero).

Tuttavia c'è anche un'altra, e più interessante, possibilità: quella di identificare $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con S^1 con proiezione canonica

$$\pi_2 : \mathbb{R} \to S^1\,, \qquad \pi_2(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))\,. \tag{2.1.3}$$

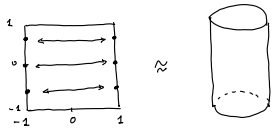
Infatti π_2 è suriettiva e, per la periodicità delle funzioni trigonometriche, le sue fibre sono esattamente le classi di equivalenza $\{x + n \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$. Inoltre, in questa identificazione, la topologia quoziente è quella standard (cioè la relativa da $\mathbb{R}^2$) di S^1. Infatti:

- La preimmagine di ogni arco aperto di S^1 è unione di infiniti intervalli aperti in $\mathbb{R}$ e pertanto è aperta. Dunque, siccome gli archi aperti sono una base per la topologia di S^1, ogni aperto di S^1 appartiene anche alla topologia quoziente.
- Viceversa, supponiamo che $A \subset S^1$ sia aperto nella topologia quoziente. Allora $\pi_2^{-1}(A)$ è aperto in $\mathbb{R}$ e dunque è un'unione di intervalli aperti I_j, $j \in J$ (un qualche insieme di indici). La proiezione π_2 manda ogni intervallo aperto in $\mathbb{R}$ in un aperto di S^1 (un arco aperto oppure tutto S^1). D'altra parte, siccome π_2 è suriettiva, si ha $\pi_2(\pi_2^{-1}(A)) = A$. Dunque $A = \pi_2(\cup_j I_j) = \cup_j(\pi_2(I_j))$ è unione di aperti di S^1 e dunque è aperto.

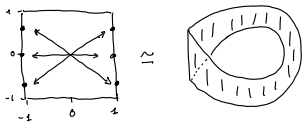
Dunque, il toro $\mathbb{T}^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con la topologia quoziente è omeomorfo a S^1. Per questo motivo si fa usualmente l'identificazione di $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con S^1.

4. Cilindrio, toro, nastro di Möbius, bottiglia di Klein. Con operazioni di quoziente si costruiscono alcune ben note varietà topologiche (e in realtà differenziabili) bidimensionali. Ci limitiamo a costruirle come spazi quoziente; che essi siano varietà topologiche bidimensionali si può poi provare come faremo per $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ nella Sezione 2.2.E.

Consideriamo il quadrato $Q = [-1, 1] \times (-1, 1) \ni (x, y)$.

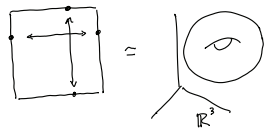


Se si identificano i lati $x = -1$ ed $x = 1$ di Q con la relazione di equivalenza[3] $(-1, y) \sim (1, y)\ \forall y \in (-1, 1)$ (se si pensa a Q come a un foglio di carta, lo si chiude a tubo), lo spazio quoziente $Q/\sim$ è omeomorfo al prodotto cartesiano $S^1 \times (-1, 1)$, cioè un cilindro, che è una varietà 2-dimensionale.

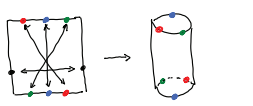


Se invece si identificano i lati $x = -1$ ed $x = 1$ di Q con la relazione $(-1, y) \sim (1, -y)\ \forall y \in (-1, 1)$ (si dà un mezzo giro al foglio prima di richiuderlo a tubo), $Q/\sim$ è un *nastro di Möbius*. Esso è una varietà 2-dimensionale (non orientabile, un concetto che verrà introdotto più avanti).

Consideriamo ora il quadrato chiuso $\overline{Q} = [-1, 1] \times [-1, 1]$.



Se identifichiamo fra loro ciascuna coppia di lati opposti di $\overline{Q}$ con la relazione $(-1, y) \sim (1, y)\ \forall y \in [-1, 1]$ e $(x, -1) \sim (x, 1)\ \forall x \in [-1, 1]$ si ottiene uno spazio topologico omeomorfo al toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ e ad una ciambella in $\mathbb{R}^3$, di fatto varietà 2-dimensionale compatta.



Se invece l'identificazione è fatta dando anche un mezzo giro ad uno dei lati, ovvero con $(-1, y) \sim (1, y)\ \forall y \in [-1, 1]$ e $(x, -1) \sim (-x, 1)$ si ottiene una varietà non-orientabile 2-dimensionale nota come *bottiglia di Klein* (e che, a differenza delle precedenti, non può essere immersa in $\mathbb{R}^3$ senza auto-intersezioni).

Osservazione: La topologia quoziente può non ereditare tutte le proprietà "buone" della topologia dello spazio sul quale è definita la relazione di equivalenza. In particolare, anche se S è una varietà topologica, $S/\sim$ potrebbe non esserlo. Per esempio, nell'esempio 2 lo spazio quoziente è la semiretta $[0, +\infty)$ con la topologia relativa di sottoinsieme di $\mathbb{R}$, che non è una varietà topologica perché 0 non ha alcun intorno omeomorfo ad un intervallo aperto di $\mathbb{R}$. In questo esempio si ottiene però una varietà topologica se ci si restringe a $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Esercizi 2.1.2 *(i) Con riferimento all'esempio 3: nella topologia quoziente su* $[0, 1)$*, gli insiemi* $[0, a) \cup (b, 1)$ *con* $0 < a < b < 1$ *sono connessi?*

(ii) Sempre nell'esempio 3, verificare che la biezione usata fra $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *e* $[0, 1)$ *è*

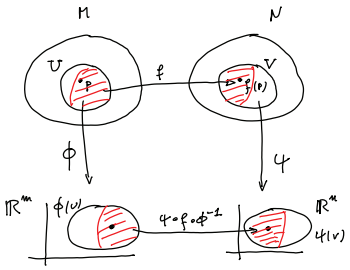
$$b_1([x]) = x - \lfloor x \rfloor$$

e che quella usata fra $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *e* S^1 *è*

$$b_2([x]) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)\,.$$

Preliminarmente, verificare che queste due formule sono ben definite, nel senso che l'espressione a destra dell'uguale è indipendente dalla scelta del rappresentante nella classe di equivalenza.

[3] Omettiamo di specificare che $(x, y) \sim (x, y)$ per tutti gli altri punti di Q; questo è tacitamente sottinteso anche negli altri esempi.



2.1.C Rappresentative locali di mappe. Siano M ed N due varietà topologiche di dimensioni m ed n, rispettivamente, e sia $f : M \to N$ una mappa. Consideriamo una carta (U, ϕ) di M ed una carta (V, ψ) di N tali che $f(U) \cap V \neq \emptyset$ (cioè, esiste $p \in U$ tale che $f(p) \in V$). Allora f mappa $U \cap f^{-1}(V)$ in $f(U) \cap V$ e quindi è definita la mappa

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}|_{\phi(U \cap f^{-1}(V))} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V \cap f(U)) \qquad (2.1.4)$$

che si chiama la *rappresentativa locale* di f relativa alle due carte considerate. Per brevità, la indicheremo spesso $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$, omettendo la restrizione; e a volte, quando non sarà indispensabile specificarne il codominio $\psi(V \cap f(U))$, la riguarderemo come a valori in $\mathbb{R}^n$.

In particolare, se N è un aperto di $\mathbb{R}$, o, più generalmente di $\mathbb{R}^n$, si può utilizzare come carta su N l'identità, e la rappresentativa locale di f è

$$f \circ \phi^{-1} : \widehat{U} \to \mathbb{R}^n \,. \qquad (2.1.5)$$

L'uso delle rappresentative locali di mappe fra varietà (e di altri oggetti quali campi vettoriali, forme differenziali e campi tensoriali che poi vedremo) è il modo usuale di lavorare con esse. In particolare, quando si scrive una data funzione in un diverso sistema di coordinate, quello che si fa è, propriamente, di considerarne una rappresentativa locale. Anzi, e particolarmente nella letteratura fisica, si tende a definire le mappe per mezzo delle loro rappresentative locali (si veda l'esercizio 2.1.3.iii).

Esempio Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^2 + y^2)x$ e ci proponiamo di "scriverla in coordinate polari" in $\mathbb{R}^2$. In realtà le coordinate polari non sono definite in tutto $\mathbb{R}^2$ ma, per esempio, in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$.

Riguardiamo allora $\mathbb{R}^2$ come una varietà e consideriamone la carta

$$\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\} \to \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi)$$
$$(x, y) \mapsto \phi(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \alpha(x, y))$$

ove $\alpha(x, y)$ è l'angolo fra il semiasse $x > 0$ e il segmento congiungente l'origine a (x, y). Questa funzione ha diversi nomi ed espressioni (per esempio "argomento principale" $\arg(x, y)$ in analisi complessa, "atan2" in vari linguaggi di programmazione) e coincide con $\arctan \frac{y}{x}$ nel primo quadrante, ma questo non è rilevante qui perché quello che ci serve è la sua inversa, che è

$$\phi^{-1}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta) \,.$$

Allora la rappresentativa di f in questa carta è

$$f \circ \phi^{-1}(r, \theta) = f(r \cos\theta, r \sin\theta) = r^3 \cos\theta \,.$$

Notiamo che, in pratica, nella letteratura fisica, si fa un po' diversamente. Si scrive ϕ^{-1} come (l'inversa del) cambiamento di coordinate

$$x(r,\theta) = r\cos\theta\,, \qquad y(r,\theta) = r\sin\theta$$

e poi si calcola l'espressione di f in coordinate polari, diciamola $\widehat{f}$, come

$$\widehat{f}(r,\theta) := f(x(r,\theta), y(r,\theta))\,,$$

trovando, come deve essere, $r^3\cos\theta$.

Esercizi 2.1.3 *(i) Siano (U,ϕ) e $(\tilde{U},\tilde{\phi})$ due carte di M con $U\cap\tilde{U}\neq\emptyset$ e (V,ψ) e $(\tilde{V},\tilde{\psi})$ due carte di N con $V\cap\tilde{V}\neq\emptyset$. Verficare che se una mappa f manda qualche punto di $U\cap\tilde{U}$ in $V\cap\tilde{V}$, così che entrambe le rappresentative locali $\psi\circ f\circ\phi^{-1}$ e $\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\phi}^{-1}$ sono definite, allora*

$$\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\phi}^{-1} = (\tilde{\psi}\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\phi^{-1})\circ(\tilde{\phi}\circ\phi^{-1})^{-1}$$

(nei punti nei quali sono entrambe definite).

(ii) Particolarizzare la relazione dell'esercizio (i) al caso in cui $N=\mathbb{R}$. [R]

(iii) Consideriamo un atlante di M con carte $\phi_\lambda : U_\lambda \to \phi_\lambda(U_\lambda) =: \widehat{U}_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$, e, per ogni λ, assegniamo una funzione continua

$$\widehat{f}_\lambda : \widehat{U}_\lambda \to \mathbb{R}\,.$$

Mostrare che se queste funzioni soddisfano, per tutti i $\lambda,\mu\in\Lambda$, le condizioni di compatibilità

$$\widehat{f}_\lambda\circ\phi_\lambda = \widehat{f}_\mu\circ\phi_\mu \qquad \text{in } U_\lambda\cap U_\mu$$

allora esse sono le rappresentative locali di una funzione continua $f : M\to\mathbb{R}$. [Suggerimento: provare a definire la restrizione di f a ciascun U_λ per mezzo della $\widehat{f}_\lambda$ e poi controllare che nelle intersezioni non vuote $U_\lambda\cap U_\mu$ le diverse definizioni coincidono.] [R]

2.2 Varietà differenziabili

2.2.A Premessa. Sugli oggetti geometrici che si considerano si vorrebbe poter fare un calcolo differenziale, e da questo punto di vista la nozione di varietà topologica non è abbastanza forte. Se $(M,\mathcal{T})$ è una varietà topologica di dimensione n, le tecniche del calcolo non permettono di dire se una funzione $f : M\to\mathbb{R}$ sia differenziabile. Di certo non si può invocare la definizione standard, che riguarda funzioni fra aperti di spazi $\mathbb{R}^n$. È quindi necessario aggiungere una struttura. Ma come?

Il modo scelto è quello di spostare il problema sulle rappresentative locali. Sia (U,ϕ) una carta di M. La rappresentativa locale di $f : M\to\mathbb{R}$ in tale carta è la funzione (2.1.5), cioè

$$f\circ\phi^{-1} : \phi(U)\to\mathbb{R}\,,$$

e, siccome $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ è aperto, è una comune funzione su un aperto di $\mathbb{R}^n$. Si potrebbe allora decidere di dire che f è differenziabile in un punto $p \in U$ se la sua rappresentativa locale è differenziabile in $\phi(p)$, nel senso standard dell'analisi. Tuttavia, una tale definizione dipenderebbe dalla carta scelta, mentre si vorrebbe che fosse indipendente dalla carta.

La rappresentativa locale $f \circ \tilde{\phi}^{-1}$ di f in un'altra carta $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ è legata a quella nella carta (U, ϕ) da

$$f \circ \tilde{\phi}^{-1} = f \circ \phi^{-1} \circ (\phi \circ \tilde{\phi}^{-1})$$

nei punti in cui sono entrambe definite (si veda anche l'esercizio 2.1.3.ii). Qui compare la funzione di transizione $\phi \circ \tilde{\phi}^{-1}$ fra le due carte, si veda (2.1.1). In una varietà topologica, le funzioni di transizione sono solo omeomorfismi, e dunque la differenziabilità di una rappresentativa locale non implica quella dell'altra. Ma se invece $\phi \circ \tilde{\phi}^{-1}$ è un diffeomorfismo, allora l'una è differenziabile se e solo se lo è l'altra.

Questo suggerisce quale struttura aggiuntiva occorra assegnare, se possibile, a una varietà topologica per potervi fare calcolo differenziale: un atlante tale che le funzioni di transizione fra tutte le coppie di carte i cui domini hanno intersezione non vuota siano diffeomorfismi. Tale struttura è davvero aggiuntiva, e potrebbe non essere determinata dalla sola struttura topologica (per esempio, nel senso che potrebbe essercene più di una).

In effetti, questa è la strada che si prende. Resterà poi da capire come costruire un calcolo differenziale su queste varietà.

2.2.B Varietà differenziabili e strutture differenziabili. Ricordiamo che un diffeomorfismo di classe C^k, $k = 1 \ldots, +\infty$, fra due aperti di $\mathbb{R}^n$ è una mappa biunivoca che è di classe C^k ed ha inversa pure di classe C^k.[4] Premettiamo alcune definizioni preliminari:

Definizione 2.3 *Due carte (U, ϕ) e (V, ψ) di una varietà topologica M si dicono* C^k-compatibili *se $U \cap V = \emptyset$ o, se $U \cap V \neq \emptyset$, se la loro funzione di transizione*

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

è un diffeomorfismo di classe C^k. Un atlante topologico di M è detto atlante di classe C^k *se le sue carte sono a due a due C^k-compatibili.*

[4] Una funzione fra aperti di $\mathbb{R}^n$ è di classe C^k se ha derivate parziali continue fino all'ordine k.

Possiamo ora dare la nozione di varietà differenziabile:

Definizione 2.4 *Una* varietà C^k di dimensione n *è una varietà topologica M di dimensione n insieme con un atlante di classe C^k.*

Per vari motivi, in topologia e geometria differenziali si è principalmente interessati al caso C^∞, e anche noi considereremo solo questo caso, a meno che sia detto esplicitamente il contrario. Corrispondentemente, adotteremo la seguente terminologia semplificata: chiameremo *differenziabili* (si usa anche *lisce*, traduzione dell'inglese *smooth*) le mappe C^∞ e *diffeomorfismi* i diffeomorfismi di classe C^∞. Inoltre, con *varietà differenziabile*, o semplicemente *varietà*, intenderemo una varietà differenziabile di classe C^∞, e con *atlante differenziabile* o semplicemente *atlante*, intenderemo un atlante di classe C^∞.

Una varietà può spesso essere dotata di diversi atlanti (per esempio, prendendo, se possibile, un sottoricoprimento o un raffinamento del ricoprimento $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ si costruisce, propriamente, un diverso atlante) ed è naturale domandarsi se essi inducano la stessa "struttura differenziale" (ancora da definire) oppure strutture differenziali diverse, e in tal caso quanto.

Definizione 2.5

i. Due atlanti $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, \phi_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ e $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{U}_\lambda, \tilde{\phi}_\lambda) : \lambda \in \tilde{\Lambda}\}$ su una varietà M sono compatibili *(o* equivalenti*) se la loro unione è ancora un atlante per M, ovvero se ogni carta dell'uno è compatibile con ogni carta dell'altro.*

ii. L'unione di tutti gli atlanti su M compatibili con un dato atlante si chiama atlante massimale *o* struttura differenziabile *su M.*

Un atlante è contenuto in un unico atlante massimale, che è quello ottenuto aggiungendo ad esso tutte le carte compatibili con le sue (si vedano gli esercizi). Può allora avvenire che su una data varietà topologica ci siano atlanti differenziabili non compatibili, e dunque più strutture differenziali (si veda l'esempio 2 più sotto). Se esse siano tutte (in qualche senso da precisare) equivalenti è una questione sulla quale torneremo più avanti, quando avremo a disposizione la nozione di diffeomorfismi fra varietà differenziabili.

Osservazione: (i) Considerare solo varietà di classe C^∞ non è davvero restrittivo perché, come provato da Whitney, ogni atlante massimale C^k, $k \geq 1$, contiene un atlante C^∞.

(ii) Nella definizione 2.3, la condizione di compatibilità va controllata solo per carte diverse i cui domini hanno intersezione non vuota. Se un atlante topologico è formato da una sola carta, allora tale condizione non è presente. Dunque ogni atlante topologico formato da una sola carta è di classe C^∞.

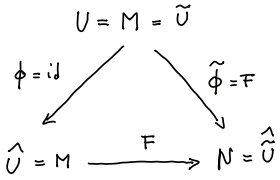
Esercizi 2.2.1 *(i) Nella definizione 2.3, se si è verificato che, per dati λ, μ, la funzione di transizione $\phi_\mu \circ (\phi_\lambda)^{-1}$ è un diffeomorfismo, è necessario controllarlo anche per $\phi_\lambda \circ (\phi_\mu)^{-1}$?* [R]

(ii) Mostrare che una varietà 0-dimensionale è unione al più numerabile di punti, e che la sua topologia è quella discreta. [Suggerimenti: localmente è omeomorfa ad $\mathbb{R}^0$, che è un punto, ed è a base numerabile]

(iii) Verificare che la compatibilità fra atlanti è una relazione di equivalenza e che l'unione di tutti gli atlanti compatibili con un dato atlante è ancora un atlante (e dunque la Definizione 2.5.ii è ben posta).

2.2.C Esempi di varietà differenziabili. Diamo ora un certo numero di esempi di varietà differenziabili. A questo stadio non abbiamo altra via che partire da varietà topologica, eventualmente costruendola, e poi fornire un atlante differenziabile, costruendo un opportuno insieme di carte compatibili.

Esempi *1. Aperti di $\mathbb{R}^n$.* Ogni aperto M di $\mathbb{R}^n$, con la topologia relativa, è una varietà differenziabile n-dimensionale. Infatti ha l'atlante, differenziabile, formato dall'unica carta (M, id). La struttura differenziabile che contiene questo atlante si chiama la struttura differenziabile *standard* di M.



Sia ora $F : M \to N$ un diffeomorfismo fra M ed un altro aperto N di $\mathbb{R}^n$. Allora anche (M, F) è una carta (con $\tilde{U} = M$, $\tilde{\phi} = F \circ \phi = F$ e $\widehat{\tilde{U}} = N$) e forma un atlante. I due atlanti sono compatibili perché $U \cap \tilde{U} = M$ e $F \circ \phi^{-1} = F$ è un diffeomorfismo da $\widehat{U} = M$ a $\widehat{\tilde{U}} = N$.

Se invece $F : M \to N$ è un omeomorfismo, ma non un diffeomorfismo, allora l'atlante formato da (M, F) non è compatibile con quello formato da (M, id) perché la funzione di transizione $F \circ \mathrm{id}^{-1} = F$ non è un diffeomorfismo. Un esempio elementare di questa situazione è fornito dal prossimo esempio.

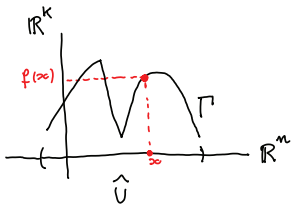
2. Due strutture differenziali su $\mathbb{R}$. La mappa

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x^3$$

è un omeomorfismo, ma non un diffeomorfismo: infatti è invertibile con inversa $\phi^{-1}(y) = y^{1/3}$, che è continua ma non differenziabile in zero. Dunque ϕ definisce un atlante $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\mathbb{R}, \phi)\}$ su $\mathbb{R}$ che non è compatibile con l'atlante standard $\{(\mathbb{R}, \mathrm{id})\}$ di $\mathbb{R}$. Di conseguenza, già su $\mathbb{R}$ ci sono diverse strutture differenziabili.

3. Grafici di funzioni continue. Sia $\widehat{U}$ un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f : \widehat{U} \to \mathbb{R}^k$, con $k \geq 1$, una funzione continua. Mostriamo che il suo grafico

$$\Gamma := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \, : \, x \in \widehat{U}\} \, ,$$



munito della topologia relativa indotta da $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ (che è Hausdorff e a base numerabile) è una varietà differenziabile n-dimensionale (sottolineiamo che è di classe C^∞ anche se f è solo continua e non differenziabile). La mappa

$$\phi : \Gamma \to \widehat{U} \, , \qquad \phi(x, f(x)) = x$$

è evidentemente continua e biiettiva. La sua inversa

$$\phi^{-1} : \widehat{U} \to \Gamma \, , \quad x \mapsto \phi^{-1}(x) := (x, f(x)) \, ,$$

è pure continua, perché le sue componenti lo sono. Così $\{(\Gamma, \phi)\}$ è un atlante costituito da una sola carta e questo prova che Γ è una varietà differenziabile.

4. *Il cerchio.* Per mostrare che S^1 è una varietà differenziabile di dimensione 1 è sufficiente verificare le condizioni di compatibilità fra le carte di uno degli atlanti topologici costruiti nell'esempio 2 della Sezione 2.1.A. Questo è immediato.

Per l'atlante costituito dalle proiezioni sugli assi coordinati, le funzioni di transizione sono mappe, da uno degli intervalli $(0, 1)$ e $(-1, 0)$ in uno di questi due stessi intervalli, del tipo $x \to \pm\sqrt{1 - x^2}$, e sono diffeomorfismi (si veda la (2.1.2)). Per l'atlante formato da due carte angolari le funzioni di transizione sono, sulle componenti connesse dell'intersezione dei domini, traslazioni, e quindi pure diffeomorfismi (si veda l'esercizio 2.1.1.i).

Non è difficile verificare che questi due atlanti sono compatibili.

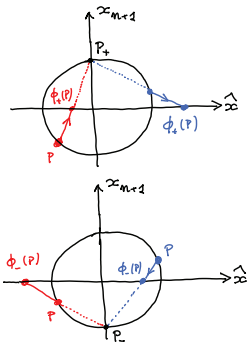
5. Le sfere. Per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$, la *sfera unitaria n-dimensionale* S^n è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$ definito come

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \, : \, \|x\| = 1\} \, .$$

Lo riguardiamo munito della topologia relativa (quindi Hausdorff e a base numerabile). Allora è una varietà C^∞ di dimensione n.

Per mostrarlo si potrebbe procedere come abbiamo fatto per il cerchio, costruendo un atlante, adesso di $2(n+1)$ carte, in cui diverse parti della sfera sono viste come grafi. Tuttavia, si può costruire un atlante costituito da due sole carte per mezzo della "proiezione stereografica". Per semplificare la notazione denotiamo $x = (\hat{x}, x_{n+1})$ con $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i punti di $\mathbb{R}^{n+1}$. Siano $P_\pm := (\hat{0}, \pm 1)$ i due poli "nord" e "sud" della sfera e $S^n_\pm := S^n \setminus \{P_\pm\}$. Le due mappe

$$\phi_\pm : S^n_\pm \to \mathbb{R}^n \, , \quad \phi_\pm(\hat{x}, x_{n+1}) = \frac{\hat{x}}{1 \mp x_{n+1}} \, ,$$



il cui significato geometrico è mostrato nelle figure a lato, sono omeomorfismi. Verifichiamolo per esempio per ϕ_+. Essa è evidentemente continua. Geometricamente è anche evidente che sia suriettiva e iniettiva, ma possiamo verificarlo

analiticamente: Sia $y \in \mathbb{R}^n$ e $(\hat{x}, x_{n+1}) \in S^n$ tale che $y = \phi_+(\hat{x}, x_{n+1})$. Allora $\hat{x} = (1 - x_{n+1})y$ e, imponendo $\|\hat{x}\|^2 + x_{n+1}^2 = 1$ ed osservando che $x_{n+1} \neq 1$, con qualche conto si trova $x_{n+1} = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}$. Quindi, ogni $y \in \mathbb{R}^n$ è l'immagine sotto ϕ_+ di uno ed un solo punto della sfera. Questo prova che ϕ_+ è invertibile ed ha inversa

$$\phi_+^{-1} : \mathbb{R}^n \to S_+^n\,, \qquad \phi_+^{-1}(y) = \Big(\frac{2y}{\|y\|^2 + 1}\,,\, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}\Big)\,.$$

Verifichiamo infine la condizione di compatibilità fra le due carte. Si ha $S_+^n \cap S_-^n = S^n \setminus \{P_+, P_-\}$ e $\phi_+(S_+^n \cap S_-^n) = \phi_-(S_+^n \cap S_-^n) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e, con qualche conto,

$$\phi_- \circ \phi_+^{-1}(y) = \phi_-\Big(\frac{2y}{\|y\|^2 + 1}\,,\, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}\Big) = \frac{y}{\|y\|^2}\,,$$

che è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ in sè.

6. Varietà 0-dimensionali. Il caso $n = 0$ ha interesse sia come caso limite in enunciati e dimostrazioni sia perché può avvenire che, per esempio a seguito di quozienti sotto azioni di gruppo, si ottengano varietà zero-dimensionali. Una varietà 0-dimensionale è l'unione di al più un'infinità numerabile di punti, che ne sono le componenti connesse (si vedano gli esercizi). In particolare, se è connessa è un punto.

7. Varietà prodotto. Tori. Siano M_1 ed M_2 due varietà, rispettivamente di dimensioni n_1 ed n_2. Il prodotto topologico $M_1 \times M_2$ acquisisce da M_1 ed M_2 una struttura di varietà definita come segue (lasciamo alcuni dettagli come esercizio).

Siano $\mathcal{A}_1 = \{(U_\lambda^1, \phi_\lambda^1) : \lambda \in \Lambda_1\}$ e $\mathcal{A}_2 = \{(U_\lambda^2, \phi_\lambda^2) : \lambda \in \Lambda_2\}$ due atlanti di M_1 ed M_2. Al solito, scriviamo $\widehat{U}_\lambda^1 = \phi_\lambda^1(U_\lambda^1) \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ e $\widehat{U}_\lambda^2 = \phi_\lambda^2(U_\lambda^2) \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$. Per ogni $\lambda_1 \in \Lambda_1$ e $\lambda_2 \in \Lambda_2$, la mappa

$$\begin{aligned} \phi_{\lambda_1,\lambda_2} : U_{\lambda_1}^1 \times U_{\lambda_2}^2 &\to \widehat{U}_{\lambda_1}^1 \times \widehat{U}_{\lambda_2}^2 \subseteq \mathbb{R}^{n_1+n_2}\,, \\ (p_1, p_2) &\mapsto \Big(\phi_{\lambda_1}^1(p_1), \phi_{\lambda_2}^2(p_2)\Big) \end{aligned}$$

è un omeomorfismo e dunque una carta. Gli aperti $U_{\lambda_1} \times U_{\lambda_2}$ coprono $M_1 \times M_2$ e si verifica che le funzioni di transizione fra le $\phi_{\lambda_1,\lambda_2}$ soddisfano le condizioni di compatibilità. Dunque $M_1 \times M_2$ con l'atlante "prodotto"

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 := \{(U_{\lambda_1} \times U_{\lambda_2}, \phi_{\lambda_1,\lambda_2}) : \lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2\} \tag{2.2.1}$$

è una varietà di dimensione $n_1 + n_2$, chiamata la *varietà prodotto* di $(M_1, \mathcal{A}_1)$ e $(M_2, \mathcal{A}_2)$.

Questa costruzione si estende al caso di un qualunque numero finito $m \geq 2$ di varietà $M_1, \ldots, M_m$.