$$\phi(B) Y_t = \varepsilon_t$$

Obiettivo: trasformare un AR(p) in un MA(∞) con coefficienti assolutamente sommabili, cioè poter scrivere

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j} \qquad \text{con} \sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty$$

Se è così sappiamo già che il processo è stazionario.

Relazione tra il polinomio autoregressivo e le radici dell'equazione caratteristica

Es AR(2) $\quad Y_t = 0.2 Y_{t-1} + 0.15 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

$\Rightarrow \phi(B) = (1 - 0.2B - 0.15B^2)$

$\Rightarrow \phi(B) = 0 \Rightarrow B_1 = 1/0.3 \quad z_1$

$B_2 = -2 \quad z_2$

Posso ottenere $\phi(B)$ in questo modo [caso AR(2)]

$$\left(1 - \frac{1}{B_1} B\right)\left(1 - \frac{1}{B_2} B\right) = (1 + 0.3B)(1 - 0.5B) =$$
$$= (1 + 0.3B - 0.5B - 0.15B^2) =$$
$$= (1 - 0.2B - 0.15B^2)$$

Dunque

$$\Rightarrow \phi(B) = \prod_{i=1}^{p} \left(1 - \frac{1}{B_i} B\right)$$

$$\Rightarrow Y_t = \phi(B)^{-1} \varepsilon_t$$

$$\phi(B)^{-1} = \prod_{i=1}^{p} \left(1 - \frac{1}{B_i} B\right)^{-1}$$

$$= \prod_{i=1}^{p} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{B}{B_i}\right)^k\right] =$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{\infty} c_j B^j$$

c_j coeff dell'espansione

$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j$ se $|x| < 1$

- se $|B_i| > 1$ allora

$$\left|\frac{B}{B_i}\right| \leq \frac{1}{|B_i|} < 1$$

e dunque posso applicare la serie geometrica

$\Rightarrow Y_t = \phi^{-1}(B)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j}$ ma questo non basta, devo mostrare anche che $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty$

Si dimostra che

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| \leq \prod_{i=1}^{p} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|B_i|^k} \right] = \prod_{i=1}^{p} \left(1 - \frac{1}{|B_i|} \right)^{-1} < \infty$$

$\frac{1}{|B_i|} < 1$ se $|B_i| > 1$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{1}{B_i} \right|^k = \left(1 - \frac{1}{|B_i|} \right)^{-1}$$

perché, essendo $|B_i| > 1$

$\Rightarrow \frac{1}{|B_i|} < 1$ e quindi è come avere $(1-x)^{-1}$ con $|x| < 1$

Da dove derivano i coefficienti c_i ?

Dal prodotto $\prod_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{B}{B_i}\right)^k$

Consideriamo il caso $p=2$ (2 radici). Si ha:

$$\phi(B)^{-1} = \prod_{i=1}^{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{B}{B_i}\right)^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{B_1^k}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B^\ell}{B_2^\ell}\right) = \text{facio prodotto}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B^{k+\ell}}{B_1^k B_2^\ell}$$

per ottenere i c_j bisogna raccogliere i termini con le stesse potenze. In questo caso

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2}$$

$$c_2 = \frac{1}{B_1^2} + \frac{1}{B_1 B_2} + \frac{1}{B_2^2}$$

$$\vdots$$

$$c_j = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_p = j} \frac{1}{B_1^{k_1} \cdot \dots \cdot B_p^{k_p}}$$

Dunque

$$|c_j| = \sum_{k_1 + \dots + k_p = j} \left| \frac{1}{B_1^{k_1} \cdots B_p^{k_p}} \right| \leq \frac{1}{|B_1|^{k_1} \cdots |B_p|^{k_p}}$$

sommando poi rispetto a j

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_p=j} \frac{1}{|B_1|^{k_1} \cdots |B_p|^{k_p}}$$

perché poi la sommatoria diventa un prodotto?

$$\frac{1}{|B_1|^{k_1} \cdots |B_p|^{k_p}} = \frac{1}{|B_1|^{k_1}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{|B_p|^{k_p}}$$

e quindi

$$\sum_{k_1,\dots,k_p \geq 0} \frac{1}{|B_1|^{k_1}} \cdots \frac{1}{|B_p|^{k_p}} =$$

$$= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{|B_1|^{k_1}} \right) \cdots \left(\sum_{k_p=0}^{\infty} \frac{1}{|B_i|^{k_p}} \right)$$

Dunque, essendoci p prodotti

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| \leq \prod_{j=1}^{p} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|B_j|} \right)^k$$