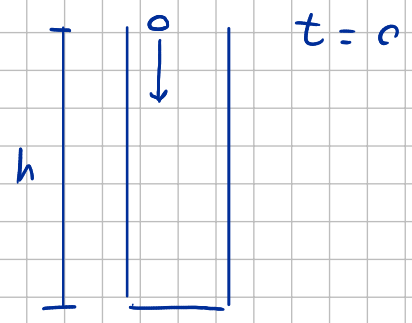
Determinare la profondità di un pozzo sapendo che il tempo tra l'istante in cui si lascia cadere un sasso, senza velocità iniziale, e quello in cui si ode il rumore, in conseguenza dell'urto del sasso con il fondo del pozzo, è $t_f = 4.8$ s. Trascurare la resistenza dell'aria e assumere la velocità del suono pari a 340 m/s.



svolgimento:

Il sasso si muoverà di moto accelerato in verticale:

$v_s = 340$ m/s

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$t_f = 4.8$ s $\qquad h = ?$

Poniamo lo 0 della posizione verticale sul fondo del pozzo e consideriamo le ipotesi:

$$y_0 = h \qquad v_0 = 0 \qquad a = -g \cong -9.81 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow y(t) = h - \frac{g}{2} t^2$$

Possiamo trovare l'istante di impatto con il fondo per una data profondità h:

$$y(t_{FONDO}) = 0 = h - \frac{g}{2} t_{FONDO}^2$$

$$t_{FONDO}^2 = 2\frac{h}{g} \Rightarrow t_{FONDO} = \pm\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La nostra soluzione sarà positiva, perciò scegliamo +.

Però il suono si sentirà solo dopo che, dall'arrivo del sasso, questo avrà viaggiato per la stessa distanza percorsa dal sasso. allora:

$$t_{SUONO} = \frac{h}{v_s} \; ; \quad \overbrace{t_f}^{\text{NOTO}} = t_{FONDO} + t_{SUONO} =$$

$$= \frac{h}{v_s} + \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \sqrt{\frac{2h}{g}} = t_f - \frac{h}{v_s} \quad ☆$$

$$\frac{2h}{g} = t_f^2 - 2\frac{h t_f}{v_s} + \frac{h^2}{v_s^2}$$ ↙ elevamento a potenza 2

$$h^2 + h\left(-2 t_f v_s - 2\frac{v_s^2}{g}\right) + v_s^2 t_f^2 = 0$$

$$\Rightarrow h = v_s t_f + \frac{v_s^2}{g} \pm \sqrt{\left(t_f v_s + \frac{v_s^2}{g}\right)^2 - v_s^2 t_f^2}$$

Come si sceglie la soluzione?

Le due soluzioni sarebbero: $h_- = 99.7\ m$ $h_+ = 26.7\ km$

La soluzione h+ è molto maggiore della sua gemella, e considerando il problema fisico in questione è abbastanza sospetto. Possiamo mostrare che non corrisponde a una vera soluzione tornando all'equazione prima dell'elevamento a potenza:

$$\star\ \sqrt{\frac{2h}{g}} = t_f - \frac{h}{v_s} \quad \rightarrow \quad t_f - \frac{h_+}{v_s} \simeq -74\ s$$

La soluzione non è valida dato che la radice al lato sinistro dell'equazione deve essere positiva. Utilizzarla implicherebbe anche che il tempo necessario al viaggio del suono sia superiore al tempo totale tf. Dunque il risultato finale è dato da h-:

$$h = h_- \simeq 99.7\ m$$

EX 5 UN PUNTO MATERIALE* VIENE GETTATO DA $h = 2\,m$ CON VELOCITÀ INIZIALE $\vec{v}_0 = (3.2\,\hat{u}_x + 2.4\,\hat{u}_y)\,m/s$

TROVARE: • ALTEZZA MASSIMA RAGGIUNTA h_{MAX}

• TEMPO DI VOLO • DISTANZA ORIZZONTALE TRA PUNTO DI LANCIO E DI ATTERRAGGIO

• VELOCITÀ DI IMPATTO.

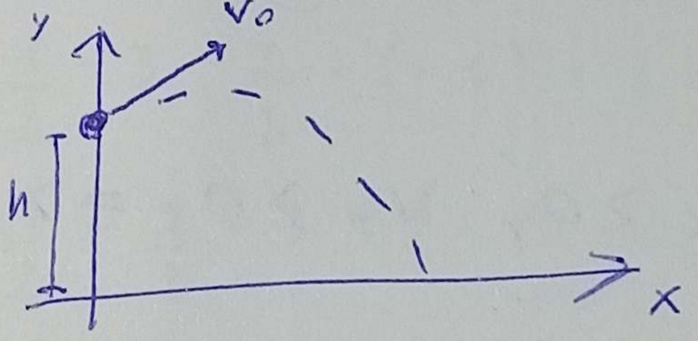
SOL * SOTTOPOSTO SOLAMENTE ALL'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE

SOL • SULLA COORDINATA X IL MOTO SARÀ RETTILINEO UNIFORME (NESSUNA FORZA), SULLA Y INVECE SARÀ ~~PARA~~ UNIFORMEMENTE ACCELERATO:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x0} \\ v_y(t) = v_{y0} - g\,t \end{cases}$$

ACCELERAZIONE GRAVITAZIONALE $g \cong 9.81\,m/s^2$

$$\begin{cases} x = V_{x0}\, t \\ y = V_{y0}\, t - \frac{1}{2} g t^2 + h \end{cases}$$



L'ALTEZZA SARÀ MASSIMA L'ISTANTE IN CUI V_y SMETTE DI ESSERE POSITIVA:

$$V_y(t_{h_{MAX}}) = 0 = V_{y_0} - g\, t_{h_{MAX}} \Rightarrow t_{h_{MAX}} = \frac{V_{y_0}}{g} \cong 0.24\,s$$

$$\Rightarrow h_{MAX} = y(t_{h_{MAX}}) = \frac{V_{y_0}^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{V_{y_0}^2}{g^2} + h = \frac{1}{2} \frac{V_{y_0}^2}{g} + h \cong 2.29\,m$$

- IL VOLO TERMINA QUANDO $y(t_{VOLO}) = 0$

$$-\frac{1}{2} g\, t_{VOLO}^2 + V_{y_0}\, t_{VOLO} + h = 0$$

$$t_{VOLO} = \frac{-V_{y_0} \pm \sqrt{V_{y_0}^2 + 2gh}}{-g} = \frac{V_{y_0}}{g} \mp \sqrt{\frac{V_{y_0}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

t_{VOLO} DEVE ESSERE POSITIVO; SCELGO $t_{VOLO} = \frac{V_{y_0}}{g} + \sqrt{\frac{V_{y_0}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} =$

$\cong 0.91\ s$.

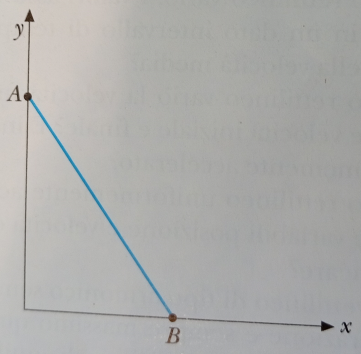
- ABBIAMO GIÀ IL TEMPO DI VOLO, BASTA CALCOLARE x:

$$x(t_{volo}) - x(0) = v_{x0}\, t_{volo} - 0 \cong 2.91\ m$$

- SIMILMENTE, $\vec{v}(t_{volo}) = (v_{x0}, v_{y0} - g\, t_{volo}) \cong (3.2, -6.5)\ m/s$

$$|\vec{v}(t_{volo})| = 7.3\ m/s$$

Su un piano orizzontale sono poste due guide lisce, perpendicolari tra loro, lungo le quali possono scorrere gli estremi di un'asta AB, lunga $l = 1$ m. Inizialmente l'asta è disposta lungo l'asse y. L'estremo B viene mantenuto in moto con velocità costante $v_B = 0.1$ m/s. Determinare il modulo della velocità e dell'accelerazione dell'estremo A quando B raggiunge la posizione $x_B^* = 0.3$ m.



$l = 1$ m

$\vec{r}_A$ è sempre sulla ASSE y: $\vec{r}_A = (0, y_A(t))$

$\vec{r}_B$ è sull'ASSE x: $\vec{r}_B = (x_B(t), 0)$

$v_B = 0.1$ m/s COSTANTE

$t = 0$: $x_B(0) = 0$ $\quad y_A(0) = l$ (ASTA LUNGO $\hat{y}$)

$x_B(t^*) = 0.3$ m

svolgimento:

Il moto del punto B è rettilineo uniforme lungo x: $x_B(t) = v_B t \Rightarrow t^* = 3$s

L'asta è rigida e mantiene la stessa lunghezza, perciò la distanza tra gli estremi A e B sarà sempre costante:

$$l = \sqrt{v_B^2 t^2 + y_A^2(t)}$$

$$\Rightarrow \quad y_A^2(t) = l^2 - v_B^2 t^2$$

$$\Rightarrow \quad y_A(t) = \pm \sqrt{l^2 - v_B^2 t^2}$$

Scegliamo la sol. positiva dato che nelle condizioni iniziali: $y_A(0) = +l$

NOTA La soluzione è valida fino a che il radicando è positivo. dopodichè, le ipotesi del problema perdono di senso.

Ora troviamo velocità e accelerazione verticali derivando la legge oraria trovata (orizzontalmente, B rimane fermo):

$$y_A = \sqrt{l^2 - v_B^2 t^2} \qquad v_{y,A} = \dot{y}_A = \frac{1}{2\sqrt{l^2 - v_B^2 t^2}} \cdot (-2 v_B^2 t)$$

$$= \frac{-v_B^2 t}{\sqrt{l^2 - v_B^2 t^2}}$$

NOTA $\dot{f} := \frac{d}{dt} f$

$$a_{y,A} = \dot{v}_{y,A} = -v_B^2 \left[\frac{1}{\sqrt{l^2 - v_B^2 t^2}} - \frac{1}{2} t \cdot \frac{(-2 v_B^2 t)}{(l^2 - v_B^2 t^2)^{3/2}} \right]$$

$$= \frac{-v_B^2}{(\ell^2 - v_B^2 t^2)^{3/2}} \left[\ell^2 - v_B^2 t^2 + v_B^2 t^2 \right]$$

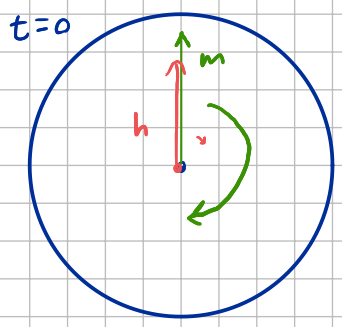
$$= \frac{-\ell^2 v_B^2}{(\ell^2 - v_B^2 t^2)^{3/2}}$$

Per la soluzione ora basta sostituire i dati:

$$v_{y,A}(t^*) \cong -0.03 \text{ m/s} = -3 \text{ cm/s}$$

$$a_{y,A}(t^*) \cong -0.01 \text{ m/s}^2 = -1 \text{ cm/s}^2$$

Considerando le lancette dei minuti e delle ore di un orologio a partire dalla posizione di mezzogiorno, determinare le posizioni angolari in cui esse vengono a a sovrapporsi.



svolgimento:
Dal nostro quotidiano sappiamo i periodi delle due lancette:

$$T_h = 24\,h \qquad T_m = 1\,h$$

NOTA Potremmo convertire in secondi, ma le ore sono comode per i conti. Basta ricordare quale unità si sta usando

Ricordiamo come si trova la frequenza e la velocità angolare per un moto circolare uniforme:

$$f = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_h = \frac{2\pi}{24\,h} \simeq 0.26\ \text{RAD}/h \qquad \omega_m = \frac{2\pi}{1\,h} \simeq 6.28\ \text{RAD}/h$$

$$\Rightarrow \quad \theta_h(t) = \omega_h t \qquad \theta_m(t) = \omega_m t$$

Per trovare i punti di incontro, dovremo trovare i tempi per cui gli angoli sono uguali a meno di giri completi (in radianti, multipli di 2pi):

$$\Rightarrow \quad \theta_m(t) = \theta_h(t) + 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_m t = \omega_h t + 2\pi n$$

$$t = \frac{2\pi n}{\omega_m - \omega_h}$$

Primo incontro: $n = 1$ $\quad t_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_m - \omega_h} \simeq 1.04\,h$

$$\simeq 1\,h, 2\,min, 37\,s$$

$$\Rightarrow \quad \theta_1 = \theta_h(t_1) = \omega_h t_1 \simeq 0.27\ \text{RAD} \cong 15.6^\circ$$