Ex RISOLVERE L'EQUAZIONE:

$$2\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{23}-x\right)+1$$

SOL USIAMO LE FORMULE DI SOTTRAZIONE:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\cos x-\cos\frac{2\pi}{3}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)+1$$

$\frac{2\pi}{3}$ È ANGOLO NOTO; ANCHE $\pi/3$

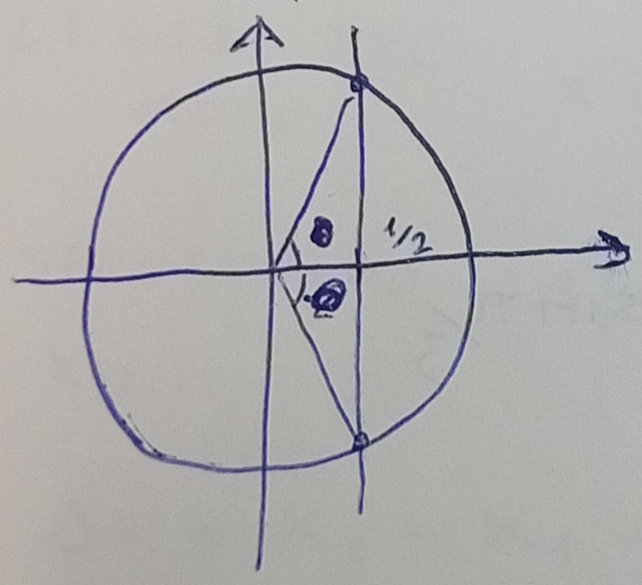
$$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\qquad \sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\qquad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)+1$$

$$3\cos x+\sqrt{3}\sin x=\cos x+\sqrt{3}\sin x+1$$

$$2\cos x=1$$

$$\cos x=1/2$$



L'EQUAZIONE È RISOLTA PER

$$x=\frac{\pi}{3}\qquad x=-\frac{\pi}{3}$$

E LA SOL. GENERALE È

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Ex RISOLVERE $\dfrac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x} = \sin x - \cos x$

SOL CONDIZIONI DI ESISTENZA $x \neq \pi/4$

DUPLICAZIONE: $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\Rightarrow 1 - 2\cos x \sin x = (\sin x - \cos x)^2$

$1 - 2\cos x \sin x = \sin^2 x - 2\cos x \sin x + \cos^2 x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 - 2\cos x \sin x = 1 - 2\cos x \sin x$

$0 = 0$ L'EQUAZIONE È RISOLTA PER $\forall x \neq \frac{\pi}{4}$

Ex SIA α ANGOLO. SAPENDO CHE $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, CALCOLARE $\sin(2\alpha + \pi/3)$.

SOL NON È IMMEDIATO CAPIRE COME COMPORTARSI. SVILUPPIAMO IL TERMINE DA CALCOLARE CON LE FORMULE TRIGONOMETRICHE:

$$\sin(2\alpha + \pi/3) \overset{\text{SOMMA}}{=} \sin 2\alpha \cos\pi/3 + \cos 2\alpha \sin\pi/3$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha$$

DUPLICAZIONE

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

USIAMO LE IPOTESI: $\tan\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{2}$

$$= \frac{1}{2}\cos^2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos^2\alpha;$$

IDENTITÁ FONDAMENTALE: $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{5}{4}\cos^2\alpha$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos^2\alpha = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{(4+3\sqrt{3})}{8}$

$= \frac{4+3\sqrt{3}}{10} \simeq 0.92.$

Ex 10: SIANO DATI I VETTORI $\vec{u} = (3,4)$, $\vec{v} = (-1,3)$ E $\vec{w} = (5,-1)$ NEL PIANO CARTESIANO (x,y).

- DETERMINARE $\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v} + 2\vec{w}$; ~ VETTORE
- TROVARE $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w}$; ~ SCALARE
- VERIFICARE CHE $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$.

NOTA
LAVORARE IN COMPONENTI.

NOTA $\vec{v} \times \vec{w}$ è PERPENDICOLARE sia rispetto a $\vec{v}$ che $\vec{w}$, per questa dovrebbe valere l'ultima punta.

SOL. PER CALCOLARE LA SOMMA DI VETTORI SI CALCOLANO LE SOMME DELLE COMPONENTI:

$\vec{u} = (3,4)$, $\vec{v} = (-1,3)$, $\vec{w} = (5,-1)$

$\frac{\vec{u}}{2} - \frac{2}{3}\vec{v} + 2\vec{w}$:

$$x: \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{2}{3} \cdot (-1) + 2 \cdot 5 = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + 10 = \frac{73}{6} \\ y: \frac{4}{2} - \frac{2}{3} \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 2 - 2 - 2 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v} + 2\vec{w} = \left(\frac{73}{6}, -2\right)$$

- $\vec{u} - \vec{v} = (3 - (-1); 4 - 3) = (4,1)$

$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} = (4,-1) \cdot (5,-1) = 4 \cdot 5 + (-1) \cdot (-1) =$

$= 20 + 1 = 21$

- PER IL PRODOTTO VET. SERVE ANCHE L'ASSE Z;

$$\vec{v} \times \vec{w} = \det\begin{pmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{u}_x(3 \cdot 0 - (-1) \cdot 0) + \hat{u}_y(0 \cdot 5 - (-1)(0)) + \hat{u}_z(-1 \cdot (-1) - 5 \cdot 3) =$$

$= (0,0,-7)$ (0,0,-14)

(-14)

$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0 \cdot 5 + 0 \cdot (-1) + (-7) \cdot 0 = 0$.

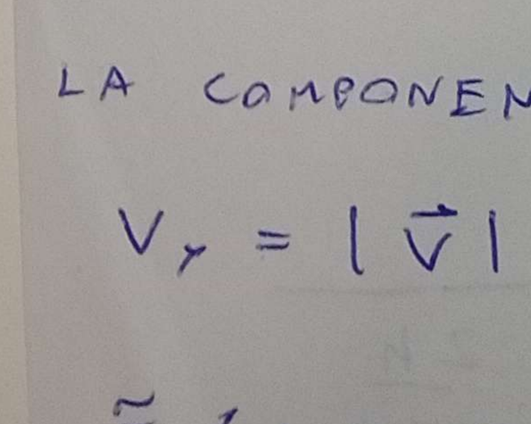
Ex 9² SI CONSIDERI IL VETTORE $\vec{v}$ NEL PIANO CARTESIANO (x, y) TALE CHE:

$|\vec{v}| = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ m$ (1.5 mm) $\qquad V_x = \vec{v} \cdot \hat{u}_x = 0.75 \cdot 10^{-3}\ m$ (0.75 mm)

- TROVARE LA COMPONENTE VERTICALE V_y DEL VETTORE $\vec{v}$ SAPENDO CHE V_y È POSITIVO.
- CHE ANGOLO FORMA $\vec{v}$ CON L'ASSE x?

$\vec{V}$ È NEL

SOL VALGONO $V_x > 0$, $V_y > 0$ => PRIMO QUADRANTE DEL PIANO.



USIAMO LA DEFINIZIONE DEL COSENO:

$$V_x = |\vec{V}| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{V_x}{|\vec{V}|} = \frac{0.75 \cdot 10^{-3}\,m}{1.5 \cdot 10^{-3}\,m} = 1/2$$

ORA POSSIAMO TROVARE θ: $\theta = \text{ARCCOS}(\cos\theta) =$

$= \text{ARCCOS}(1/2) = \frac{\pi}{3}\,\text{RAD} = 60^\circ$

NOTA ARCCOS $\equiv \cos^{-1}$

LA COMPONENTE VERTICALE SI TROVA CON IL SENO:

$$V_y = |\vec{V}| \sin\theta = (1.5 \cdot 10^{-3}\,m) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\cong (1.5 \cdot 10^{-3}\,m) \cdot (0.866) \cong 1.3 \cdot 10^{-3}\,m$$

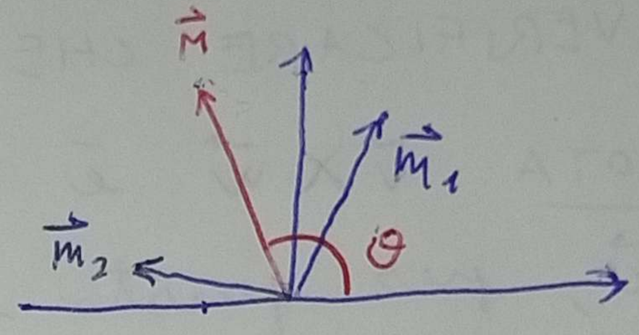
EX 3 SIANO DATI I DUE VETTORI $\vec{m}_1 = (1, 2)$ E $\vec{m}_2 = (-2, 1/2)$ NEL PIANO (X, Y).

SI CALCOLI IL MODULO DI $\vec{M} = m_1 + m_2$ E IL SUO ANGOLO θ RISPETTO ALL'ASSE X.

SOL $\vec{M}$ SI TROVA PER COMPONENTI:

$$\vec{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 = (m_{1x} + m_{2x}, m_{1y} + m_{2y}) =$$

$$= (1 - 2, 2 + 1/2) = (-1, 5/2)$$



$$|\vec{M}| = \sqrt{|\vec{M}|^2} = \sqrt{(-1)^2 + (5/2)^2} = \sqrt{1 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{29}{4}} \cong 2.7$$

$$\cos\theta = \frac{M_x}{|\vec{M}|} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{29}{4}}} = -\sqrt{\frac{4}{29}} \cong -0.37$$

$\Rightarrow \vec{M}$ È NEL SECONDO QUADRANTE: $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$\theta = \arccos(\cos\theta) = \arccos(-0,37) \cong 1.93 \text{ RAD} \cong 111.7°.$$

Ex 4 UN PUNTO SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO. QUESTO PASSA PER IL PUNTO X_1 CON VELOCITÁ $V_1 = 1.9\ m/s$, E IN $X_2 = X_1 + \Delta X$ CON $V_2 = 8.2\ m/s$. $\Delta X = 10\ m$

- TROVARE L'ACCELERAZIONE a.
- TROVARE IL TEMPO ΔT NECESSARIO A PERCORRERE IL TRATTO ΔX.

SOL IMPONIAMO CHE L'ISTANTE $t=0$ SIA QUELLO DEL PASSAGGIO IN X_1.

LEGGE DEL MOTO: $x(t) = X_1 + v_1 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad x(0) = X_1$

SFRUTTIAMO LA CONOSCENZA DELLA POSIZIONE RELATIVA DI X_2:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x(\Delta t) - x(0) =$$

$$= X_1 + v_1 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2 - X_1$$

$$\Rightarrow \Delta x = \Delta t\, v_1 + \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

CI SONO ANCORA 2 INCOGNITE!

USIAMO L'INFORMAZIONE SULLA VELOCITÁ:

$v_2 - v_1 = a \Delta t$ INSERIAMO NELL'EQ. DI PRIMA:

$$\Rightarrow \Delta x = \Delta t \left(v_1 + \frac{1}{2}(v_2 - v_1) \right) = \Delta t \, \frac{(v_1 + v_2)}{2} \sim \text{MEDIA}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{2\,\Delta x}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 10\,m}{(1.9 + 8.2)\,m/s} \cong 1.98\,s$$

$$a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \cong 3.2\ m/s^2$$