METODI STATISTICI PER LA BIOINGEGNERIA (B)

PARTE 3: MODELLI DI VARIABILI ALEATORIE, INDICI DI FORMA

A.A. 2026-2027

Prof. Enrico Longato

OUTLINE

- Variabili aleatorie iid
- Modelli di variabili aleatorie
  - Discrete
  - Continue
- Teorema del limite centrale
- Inferenza statistica e campione aleatorio
  - Campione aleatorio normale
- Indici di forma
  - Indice di asimmetria e skewness campionaria
  - Indice di curtosi e curtosi campionaria

VARIABILI ALEATORIE IID

Le variabili aleatorie X_1, X_2, …, X_n si dicono **indipendenti ed identicamente distribuite (iid)** se sono tra loro indipendenti, ovvero:

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

$$\forall\, A_1 \subset \mathbb{R}\,, A_2 \subset \mathbb{R}, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$$

$$F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \ \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

e hanno la stessa distribuzione, ovvero:

$$F_{X_1}(x) = F_{X_k}(x) \qquad \forall k \in \{1, \dots, n\}\ \forall x$$

Un esempio di variabili iid sono n variabili che rappresentano una quantità osservata in n esperimenti ripetuti nelle stesse condizioni.

- NB: Il concetto di iid qui è dato rispetto a F_X perché vale per variabili aleatorie continue e discrete, ma ricordate che si applica anche alle p_X (banale) e f_X (da dimostrare).

MODELLI DI VARIABILI ALEATORIE

- Variabile aleatoria di Bernoulli
- Variabile aleatoria binomiale
- Variabile aleatoria di Poisson

} Variabili aleatorie discrete

- Variabile aleatoria uniforme
- Variabile aleatoria esponenziale
- Variabile aleatoria di tipo gamma
- Variabile aleatoria di Weibull
- Variabile aleatoria normale o gaussiana
- Variabili aleatorie che derivano dalla normale (chi-quadro, t, F)

} Variabili aleatorie continue

VARIABILE ALEATORIA DI BERNOULLI

- Variabile aleatoria X che può assumere solo **due valori: 1** con probabilità p; **0** con probabilità 1-p.

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

$$P(X = 1) = p$$
$$P(X = 0) = 1 - p$$
$$0 \leq p \leq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E[X] = p \\ Var(X) = p(1-p) \end{cases}$$

- E' utilizzata per rappresentare l'esito di una prova che può avere solo due esiti: «**successo**» (X=1) o «**fallimento**» (X=0).
- Esempio. Un'azienda produce componenti elettronici che possono essere funzionanti con probabilità 0.95 o difettosi con probabilità 0.05 → stato del componente descritto con variabile aleatoria di Bernoulli con p=0.95

VARIABILE ALEATORIA BINOMIALE (1 /3)

- n **ripetizioni indipendenti** di un esperimento, ciascuna che può concludersi in un «**successo**» con probabilità **p**, o in un «**fallimento**» con probabilità 1-p.
- X: numero totale di successi nelle n prove.

→ X si dice **variabile aleatoria binomiale di parametri (n,p)** $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

Funzione di massa:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$$

- $E[X] = n \cdot p$
- $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Coefficiente binomiale n su k: numero di combinazioni diverse che possiamo ricavare scegliendo k elementi da un insieme di n oggetti.

VARIABILE ALEATORIA BINOMIALE (2/3)

- Una variabile aleatoria binomiale X di parametri (n,p) si può scrivere come **somma di n variabili aleatorie bernoulliane iid** X_i di parametro p.

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad X_i \sim \mathcal{B}(p) \qquad X \sim \mathcal{B}(n,p)$$

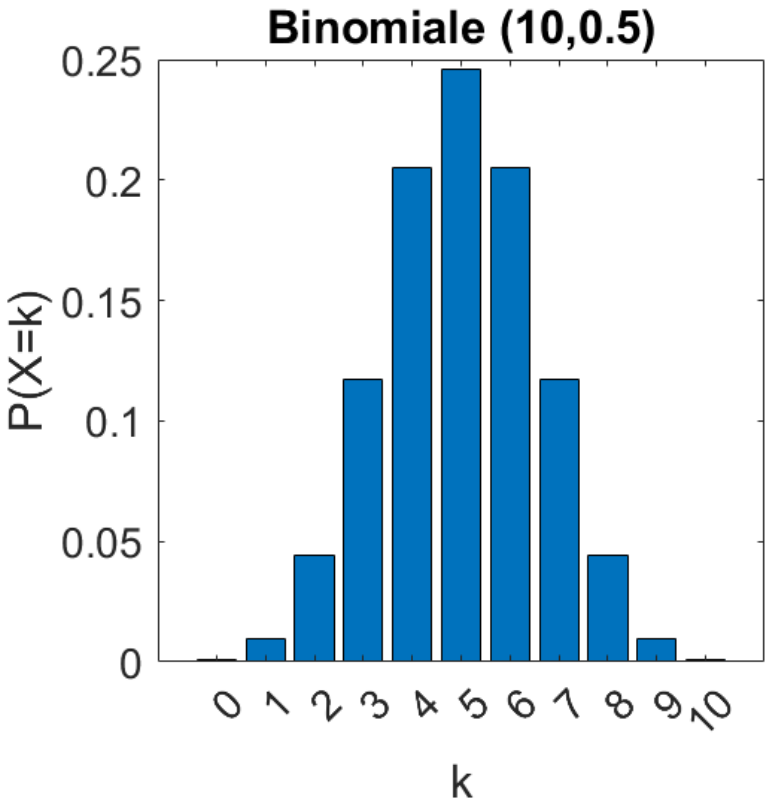
$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la prova i-esima ha successo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

VARIABILE ALEATORIA BINOMIALE (3/3)

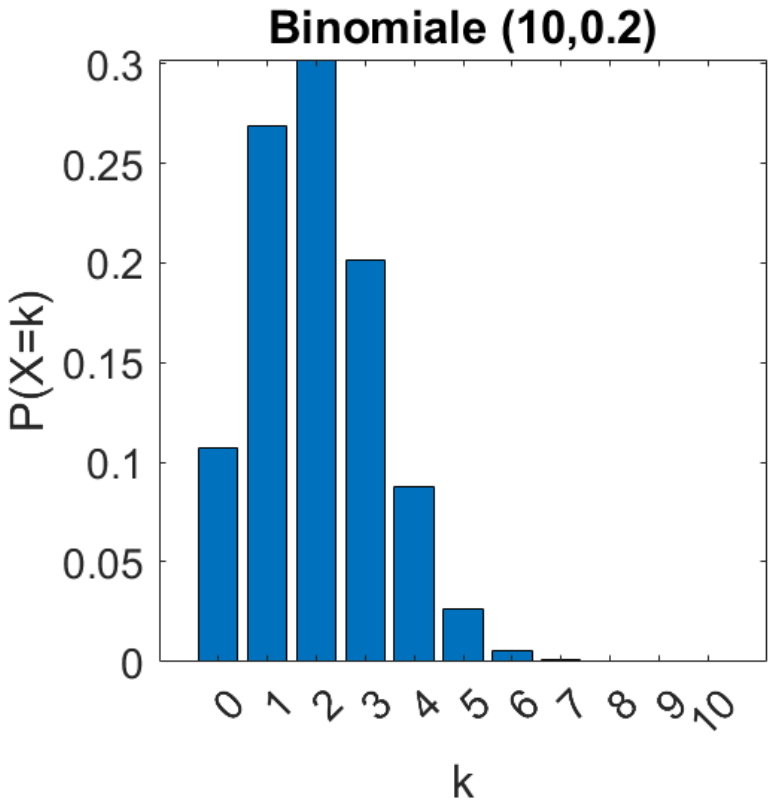
- Esempio: Un'azienda produce componenti elettronici che possono essere funzionanti con probabilità 0.95 o difettosi con probabilità 0.05. Questi componenti sono venduti in lotti ciascuno contenente 50 pezzi.

  → Il numero di componenti funzionanti in ciascun lotto è una variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p)=(50, 0.95).

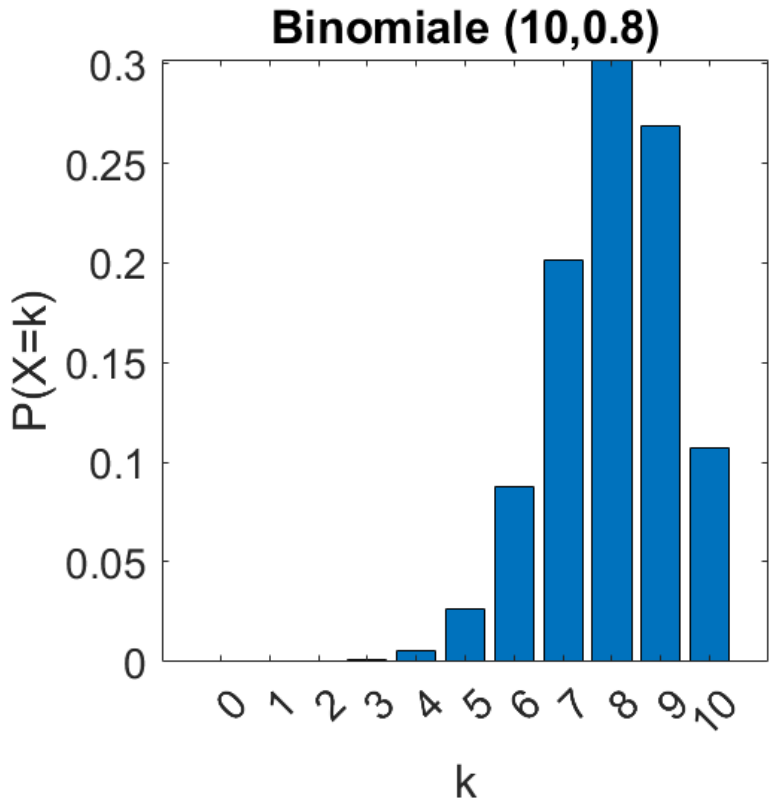
ESEMPI DI FUNZIONI DI MASSA BINOMIALI



Con p=0.5: simmetrica intorno a n/2.



Con p<0.5: asimmetrica con coda verso destra.



Con p>0.5: asimmetrica con coda verso sinistra.

VARIABILE ALEATORIA DI POISSON

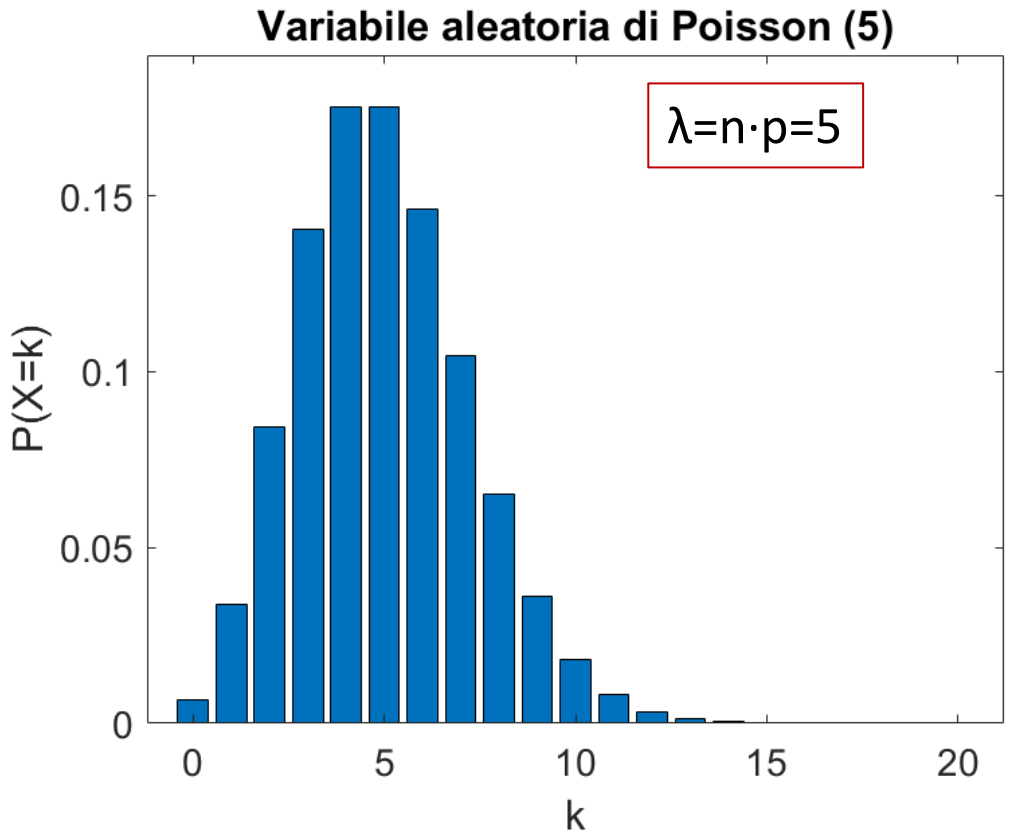
- Descrive il numero di eventi che si verificano in un intervallo di tempo fissato, sapendo che sono indipendenti e avvengono a un tasso costante.
- Variabile aleatoria discreta di parametro $\lambda>0$ che assume valori non negativi.
- Il parametro λ rappresenta il numero atteso di eventi
- Funzione di massa di probabilità:

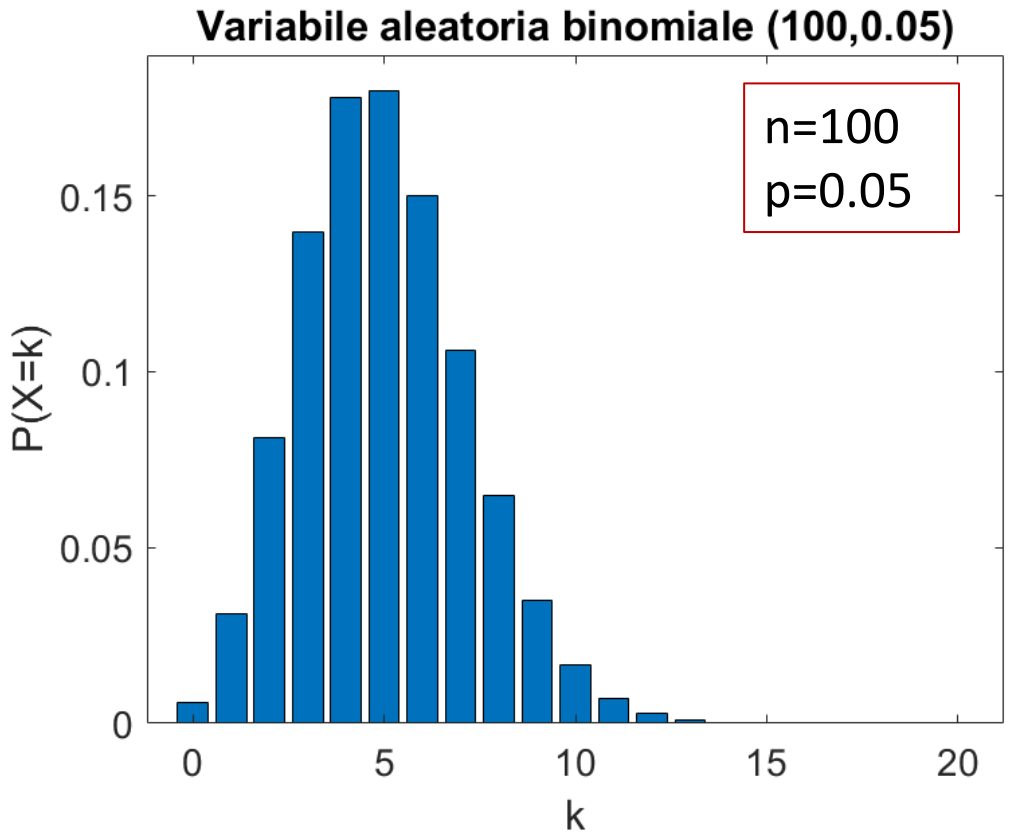
$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad X \sim P(\lambda)$$

- $E[X] = \lambda$, $Var[X] = \lambda$.

POISSON VS. BINOMIALE

- La variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda=n\cdot p$ approssima una binomiale di parametri (n, p) quando n è grande e p è piccolo.



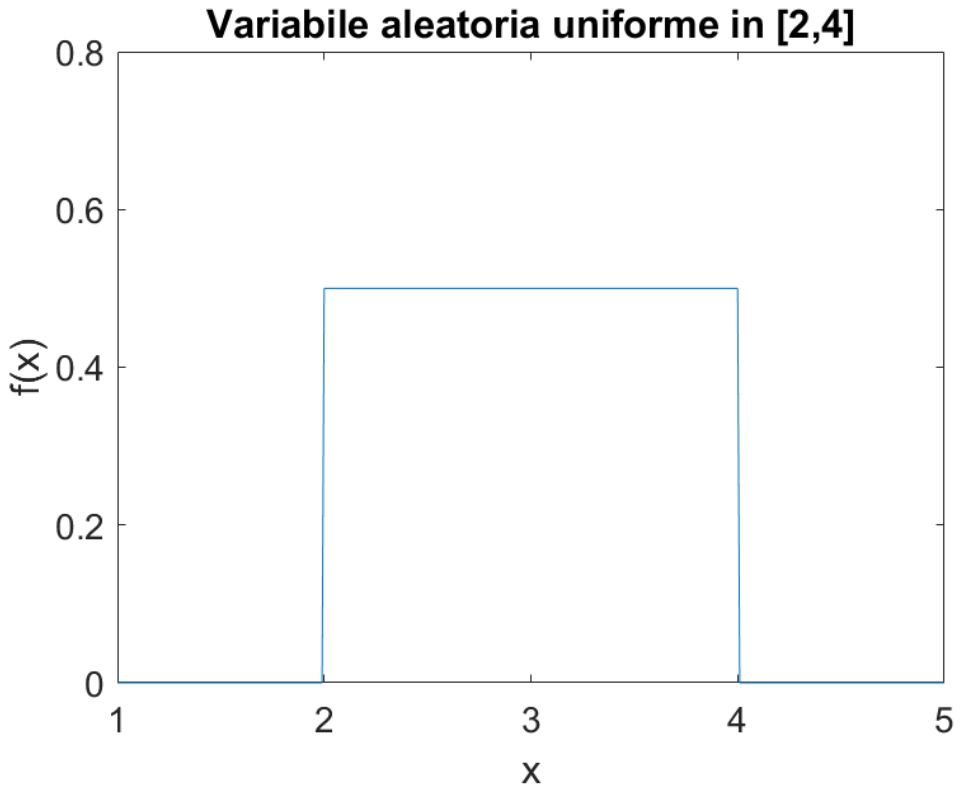


VARIABILE ALEATORIA CONTINUA UNIFORME

Una variabile aleatoria continua X si dice uniforme sull'intervallo [a, b] se la sua funzione densità di probabilità è:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & se\ a \leq x \leq b \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$X \sim U(a,b)$$



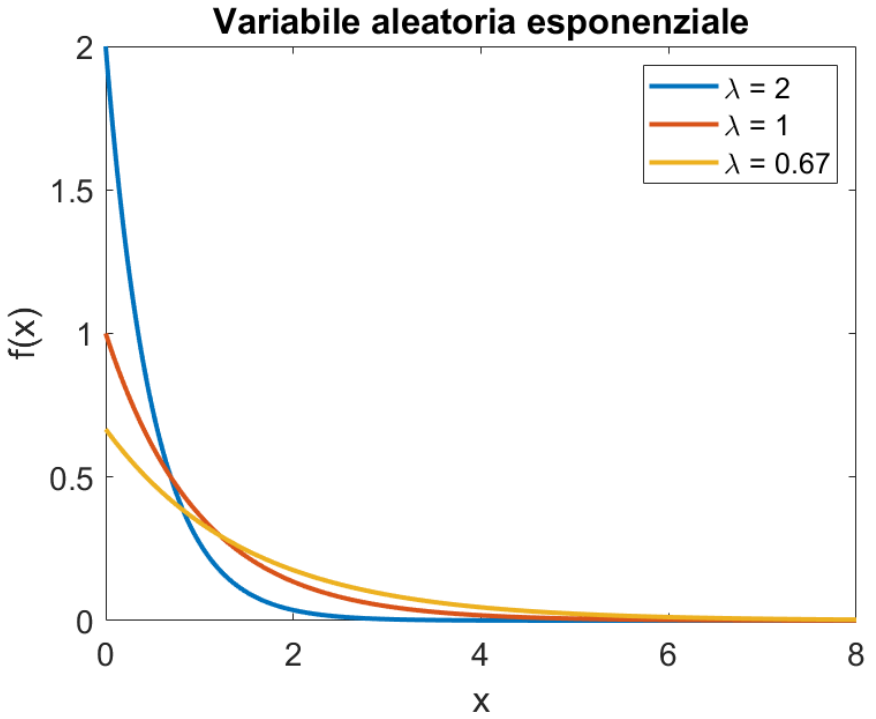
- $E[X] = \frac{a+b}{2}$
- $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$

VARIABILE ALEATORIA ESPONENZIALE

X esponenziale di parametro λ, con λ>0:

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda) \qquad f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & se\ x \geq 0 \\ 0 & se\ x < 0 \end{cases}$$

- $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$



- Impiegata per rappresentare il tempo di attesa prima che si verifichi un certo evento casuale, sotto l'ipotesi che la «probabilità istantanea» dell'evento sia costante nel tempo.
- Esempio: il tempo prima che un certo componente si guasti, senza tener conto dell'usura dei materiali del componente, può essere rappresentato da una variabile aleatoria esponenziale.

VARIABILE ALEATORIA DI TIPO GAMMA (1/2)

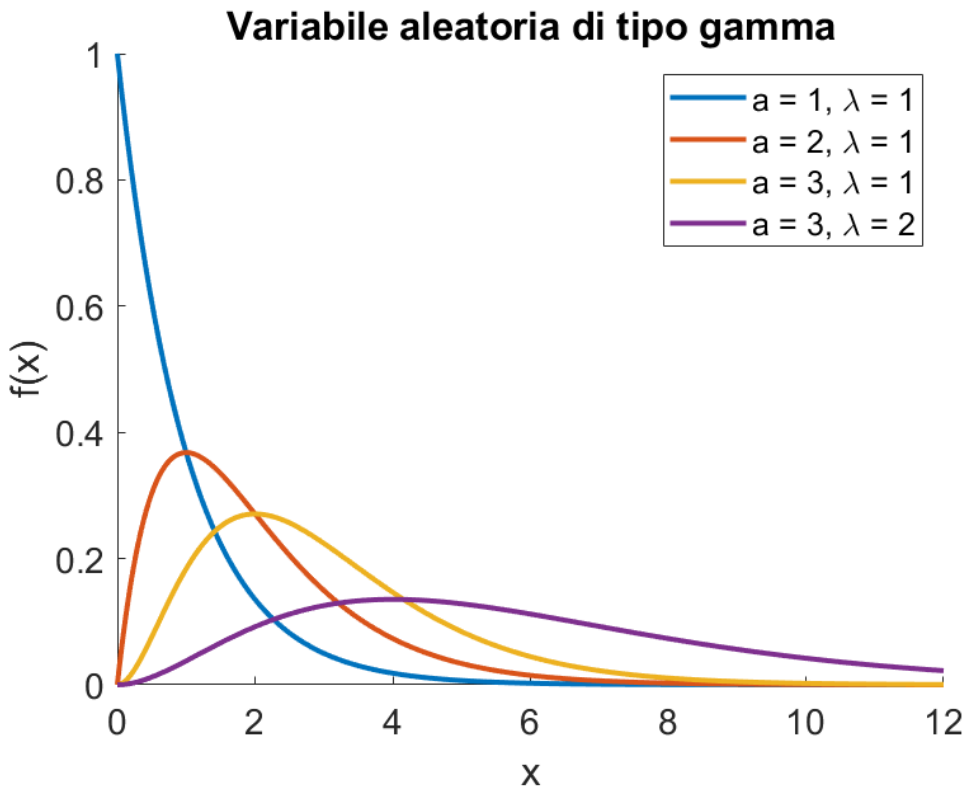
Variabile aleatoria di tipo gamma di parametri (a, λ), con a>0 e λ>0: $X \sim Gamma(a, \lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x \leq 0 \end{cases},$$

$\Gamma(a) = \int_0^\infty y^{a-1} e^{-y} dy$ → Funzione Gamma di Eulero

- $E[X] = \frac{a}{\lambda}$
- $Var[X] = \frac{a}{\lambda^2}$

Nota: con a=1, è equivalente ad una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ.



VARIABILE ALEATORIA DI TIPO GAMMA (2/2)

La somma di n variabili aleatorie esponenziali di parametro λ è una variabile aleatoria di tipo gamma di parametri (n, λ).

- Attenzione: sommare n variabili aleatorie (anche se iid) **non** è la stessa cosa che moltiplicare una variabile aleatoria per n!
- Nel caso specifico, infatti, se stessimo parlando della stessa esponenziale moltiplicata per n, questa rimarrebbe esponenziale di parametro λ/n.

Esempio. Se il tempo di vita di una batteria è descritto da una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ, allora volendo far funzionare un dispositivo che richiede una sola batteria, e avendo a disposizione n batterie, il tempo totale di funzionamento del dispositivo potrà essere descritto con una variabile aleatoria gamma di parametri n e λ.

VARIABILE ALEATORIA DI WEIBULL

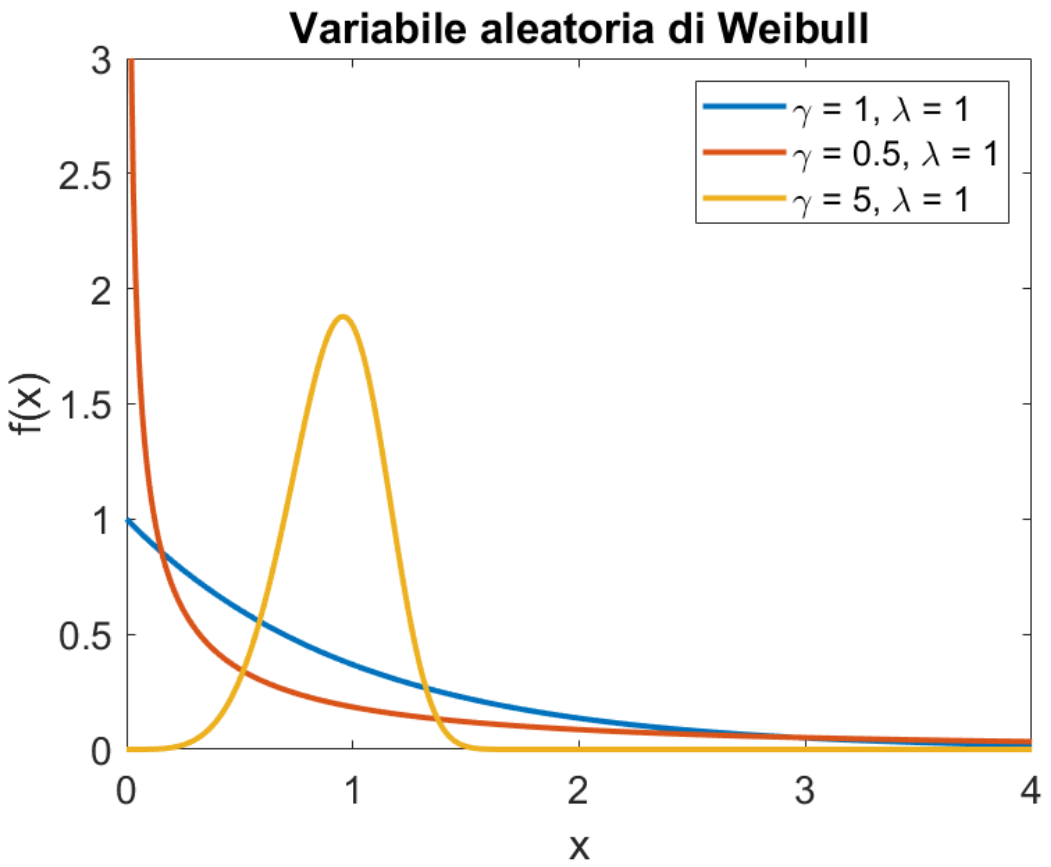
Variabile aleatoria di Weibull di parametri γ e λ, con γ>0 e λ>0:

$$f(x) = \begin{cases} \gamma \cdot \lambda \cdot (\lambda \cdot x)^{\gamma-1} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)^{\gamma}} & se\ x \geq 0 \\ 0 & se\ x < 0 \end{cases}$$

γ = parametro di forma

λ = parametro di scala

- Si usa per rappresentare il tempo ad un evento quando la «probabilità istantanea» dell'evento varia nel tempo (aumenta nel tempo con γ>1, diminuisce nel tempo con γ<1).
- Con γ=1, è equivalente ad una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ.



VARIABILE ALEATORIA NORMALE O GAUSSIANA

Una variabile aleatoria X si dice normale o gaussiana di parametri μ e σ^2 se ha funzione di densità di probabilità data da:

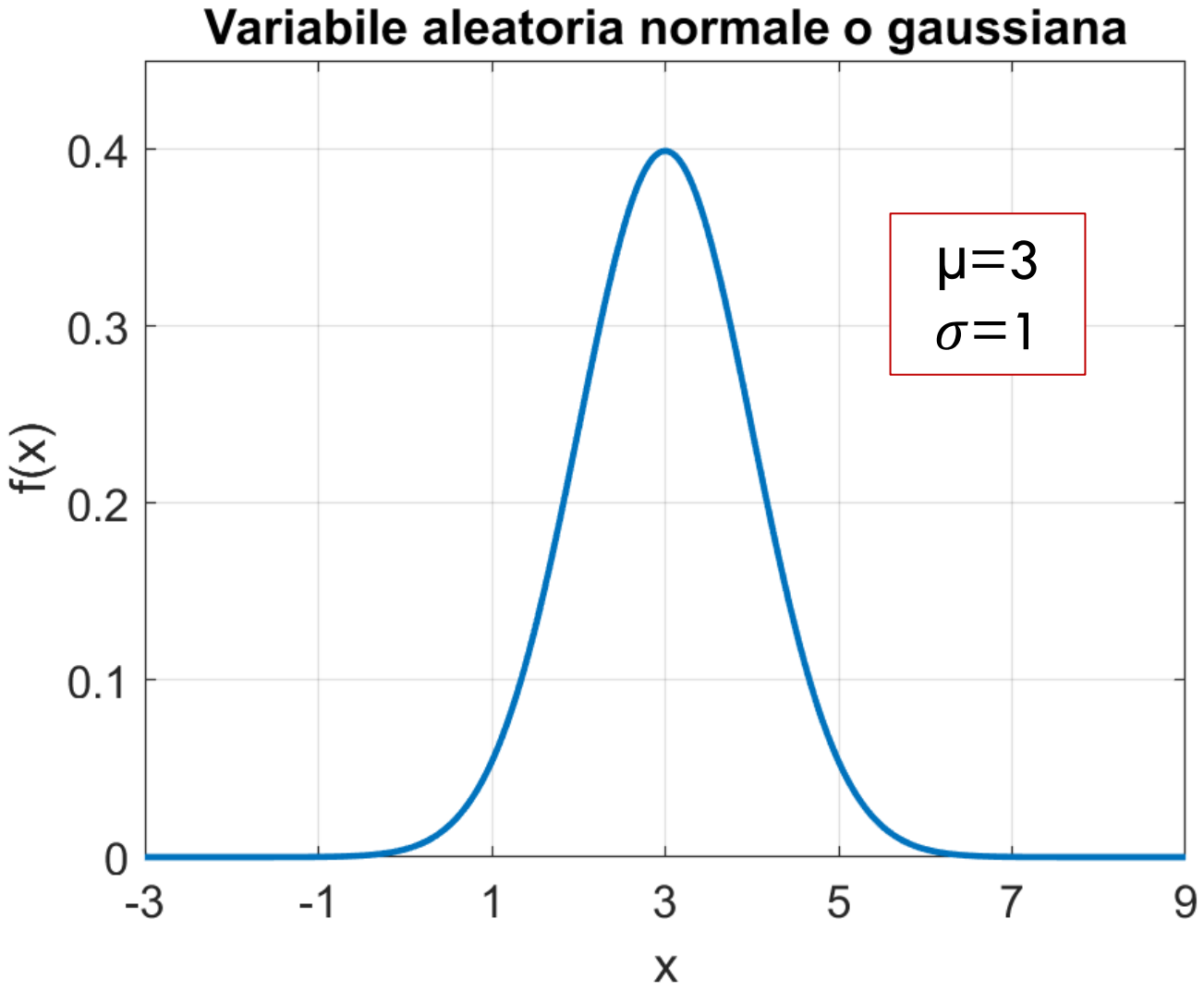
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $E[X] = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$

Per indicare che X è normale con parametri μ e σ^2 scriviamo: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

CARATTERISTICHE DELLA DDP NORMALE

- **Unimodale**: un solo picco in corrispondenza di x=μ.
- **Simmetrica** rispetto all'asse x=μ.
- Il suo valore **massimo** è $(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \approx 0.399/\sigma$.



TRASFORMAZIONE LINEARE DI UNA VARIABILE ALEATORIA NORMALE

La trasformazione lineare di una variabile aleatoria normale è anch'essa una variabile aleatoria normale.

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $Y = a \cdot X + b$

$$\Rightarrow \quad Y \sim N(a \cdot \mu + b, \quad a^2 \cdot \sigma^2)$$

NORMALE STANDARD

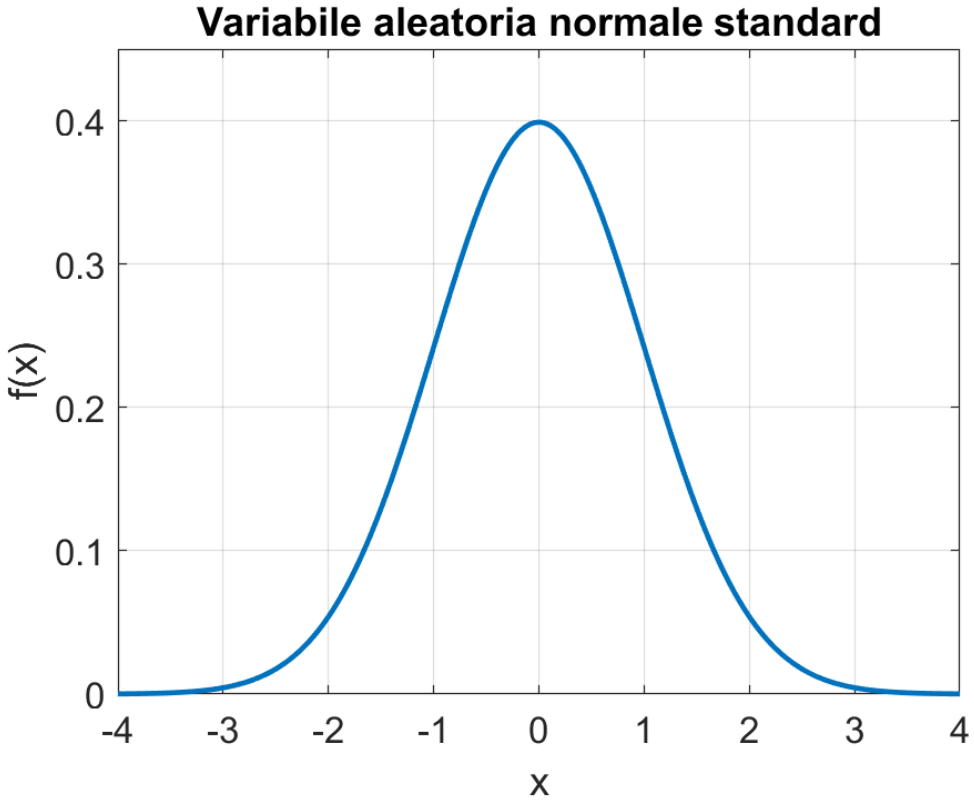
Se standardizziamo una variabile aleatoria normale, X, con valore atteso μ e deviazione standard σ, otteniamo una variabile aleatoria **normale standard:**

$$Z := \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $Z \sim N(0, 1)$

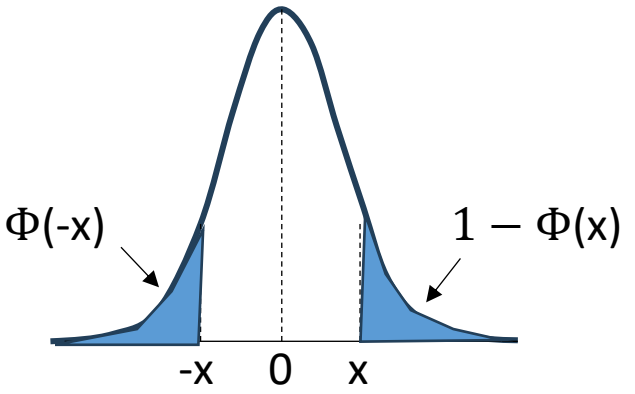
Funzione di ripartizione di una normale standard:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$



PROBABILITA' DI UNA VARIABILE ALEATORIA NORMALE

- Possiamo esprimere le probabilità di una variabile aleatoria normale, X, in termini delle probabilità di una variabile aleatoria normale standard, Z.
  - $P(X < d) = P\left(Z < \frac{d-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)$
  - $P(c < X < d) = P(X < d) - P(X < c) = P\left(Z < \frac{d-\mu}{\sigma}\right) - P\left(Z < \frac{c-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)$
  - $P(X > d) =?$
- L'integrale che definisce Φ non presenta una soluzione analitica. $\Phi(x)$ si può calcolare usando delle approssimazioni.
  - Tabelle che riportano i valori approssimati di $\Phi(x)$
  - Funzioni al calcolatore (in Matlab: normcdf)
- Nota: grazie alla simmetria, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$



LA PROBABILITA' DI ALCUNI UTILI INTERVALLI

Data una variabile aleatoria normale X con media μ e deviazione standard σ qualsiasi è possibile dimostrare che:

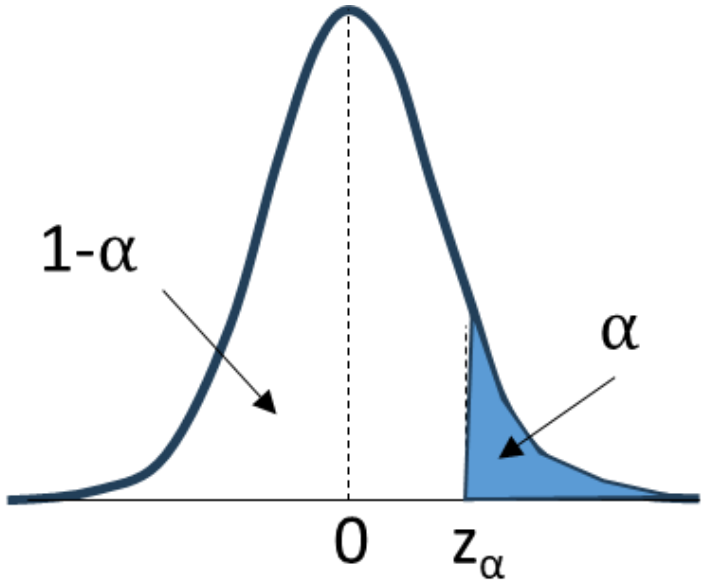
- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.68$ → Circa il 68% dei valori di una variabile aleatoria normale stanno nell'intervallo media ± deviazione standard
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.95$ → Circa il 95% dei valori di una variabile aleatoria normale stanno nell'intervallo media ± 2 deviazioni standard
- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.997$ → Circa il 99.7% dei valori di una variabile aleatoria normale stanno nell'intervallo media ± 3 deviazioni standard

QUANTILI

Per ogni α in [0, 1], definiamo il **quantile α** di una variabile aleatoria continua, X, come quel valore q_α tale che :

$$P(X > q_\alpha) = \alpha$$

<u>Per la normale standard</u>, il quantile α è quel valore z_α tale che:



$$P(Z > z_\alpha) = 1 - \Phi(z_\alpha) = \alpha \longrightarrow z_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

In Matlab:

$z_{0.05} \approx 1.645$ → norminv(0.95)

$z_{0.025} \approx 1.96$ → norminv(0.975)

$z_{0.01} \approx 2.33$ → norminv(0.99)

VARIABILE ALEATORIA CHI-QUADRO

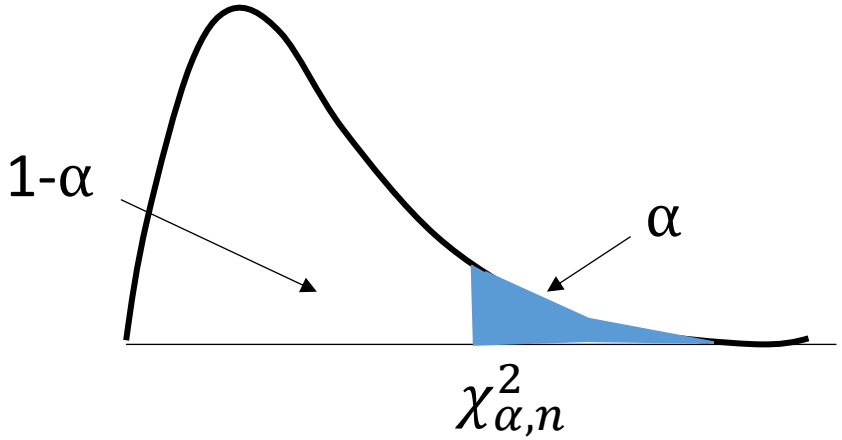
Se Z_1, Z_2, …, Z_n sono variabili aleatorie normali standard indipendenti, allora la somma dei loro quadrati, X, è una variabile aleatoria **chi-quadro ad n gradi di libertà:**

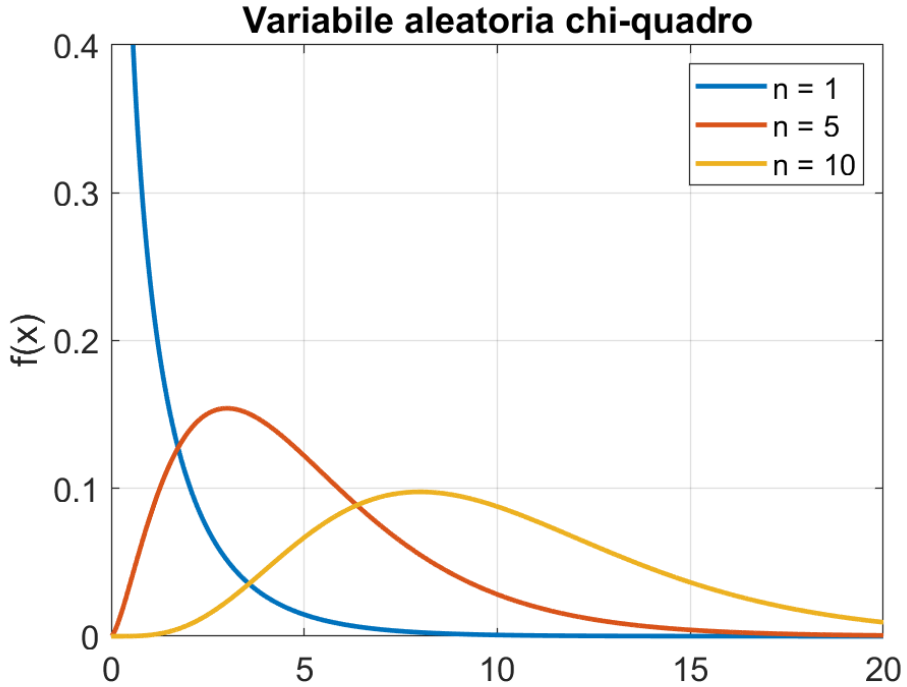
$$X = {Z_1}^2 + {Z_2}^2 + \cdots + {Z_n}^2$$

$$X \sim {\chi_n}^2$$

Quantili:

$\chi^2_{\alpha,n}$: $P(X > \chi^2_{\alpha,n}) = \alpha$





Molto intuitivamente, la chi-quadro descrive una somma di scarti quadratici da 0

VARIABILE ALEATORIA t DI STUDENT (1 /2)

Se Z è una variabile aleatoria normale standard e C_n è una variabile aleatoria chi-quadro con n gradi di libertà, e se Z e C_n sono indipendenti, allora la variabile aleatoria T_n:

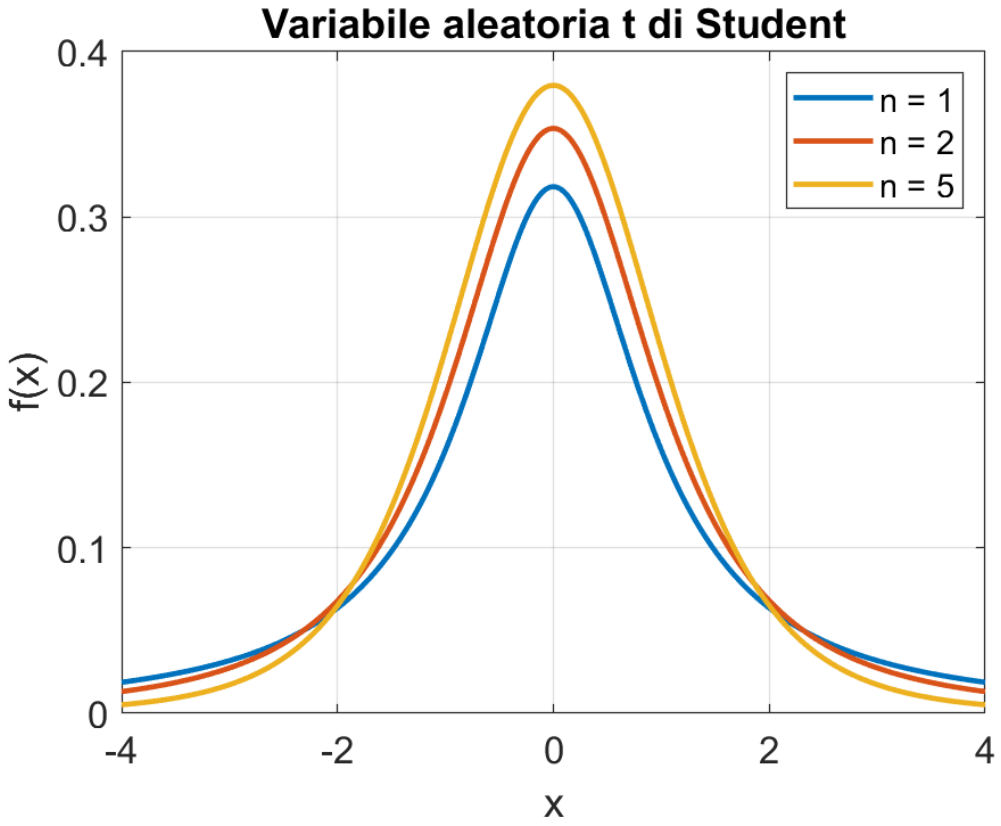
$$T_n := \frac{Z}{\sqrt{\frac{C_n}{n}}} \qquad T_n \sim t_n$$

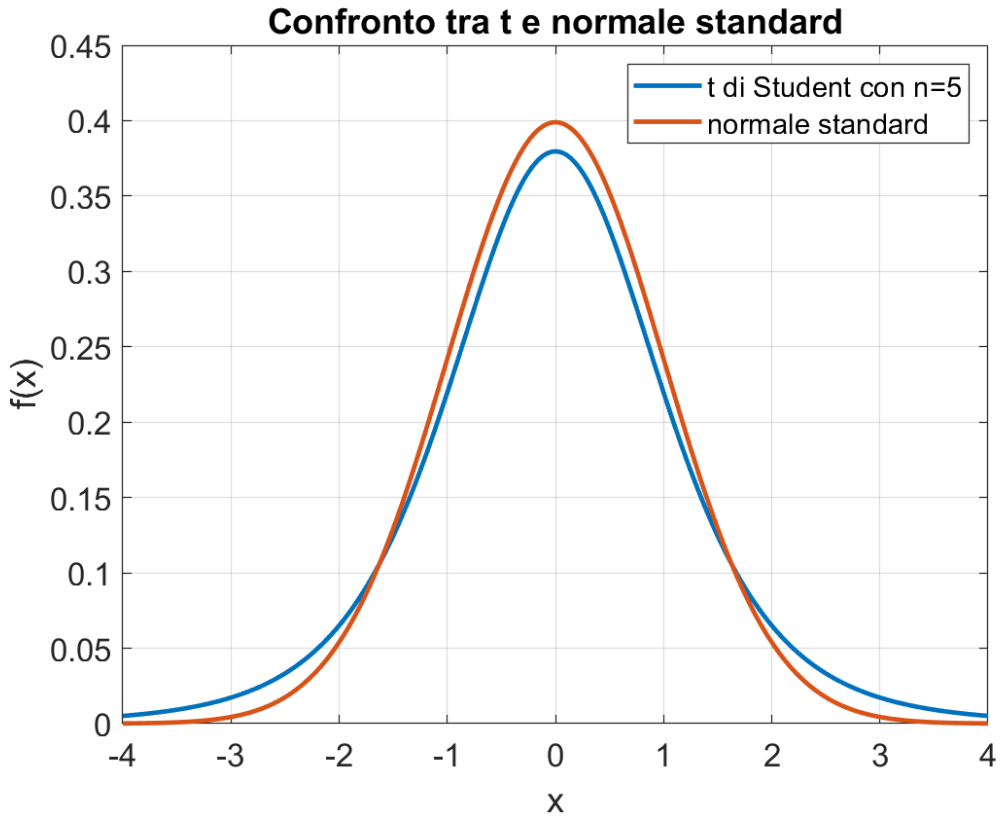
è una variabile aleatoria **t, o t di Student, con n gradi di libertà.**

- $E[T_n] = 0$ per $n \geq 2$, indefinito altrimenti
- $Var(T_n) = \frac{n}{n-2}$ se $n \geq 3$, infinita altrimenti
- Quantili $t_{\alpha,n}$: $P(T_n > t_{\alpha,n}) = \alpha$

Molto intuitivamente, la t di Student è una normale standardizzata rispetto a una scala ignota

VARIABILE ALEATORIA T DI STUDENT (2/2)





- La ddp della t di Student ha forma a campana ed è simmetrica rispetto all'asse x=0.
- Con n=5, la forma è simile a quella della normale standard, con la t di Student caratterizzata da code più spesse.
- NB: anche per n = 1 e n = 2 la ddp si può disegnare e usare per calcolare le probabilità; semplicemente non esistono i momenti centrali di ordine 1 e/o 2.

VARIABILE ALEATORIA F

Se C_n e C_m sono variabili aleatorie di tipo chi-quadro con n ed m gradi di libertà, rispettivamente, allora la variabile aleatoria $F_{n,m}$ definita da:

$$F_{n,m} = \frac{C_n/n}{C_m/m}$$

È una **variabile aleatoria di tipo F, o F di Fisher, con n ed m gradi di libertà.**

Quantili:

$$F_{\alpha,n,m}: \quad P\left(F_{n,m} > F_{\alpha,n,m}\right) = \alpha$$

Molto intuitivamente, la F di Fisher confronta due misure indipendenti di variabilità.

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

Siano X_1, X_2, …, X_n delle variabili aleatorie iid, con distribuzione qualsiasi ma uguale tra loro, tutte con media μ e deviazione standard σ^2. Se n è grande, la variabile aleatoria Y definita come:

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

converge in distribuzione ad una normale con media $n \cdot \mu$ e varianza $n \cdot \sigma^2$.

→ Y si può approssimare con una normale con media nμ e varianza $n\sigma^2$

Se standardizziamo, la variabile aleatoria standardizzata Z:

$$Z = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

per n grande converge in distribuzione ad una normale standard.

STATISTICA INFERENZIALE

- Nella **statistica descrittiva** abbiamo definito un **campione statistico** come un insieme di dati, x_1, x_2, …, x_n, raccolti per una certa variabile su di un sottoinsieme della popolazione.

- Nella **statistica inferenziale** i dati di un campione statistico vengono utilizzati per ricavare delle conoscenze sulla popolazione, sfruttando dei modelli di probabilità.

CAMPIONE ALEATORIO

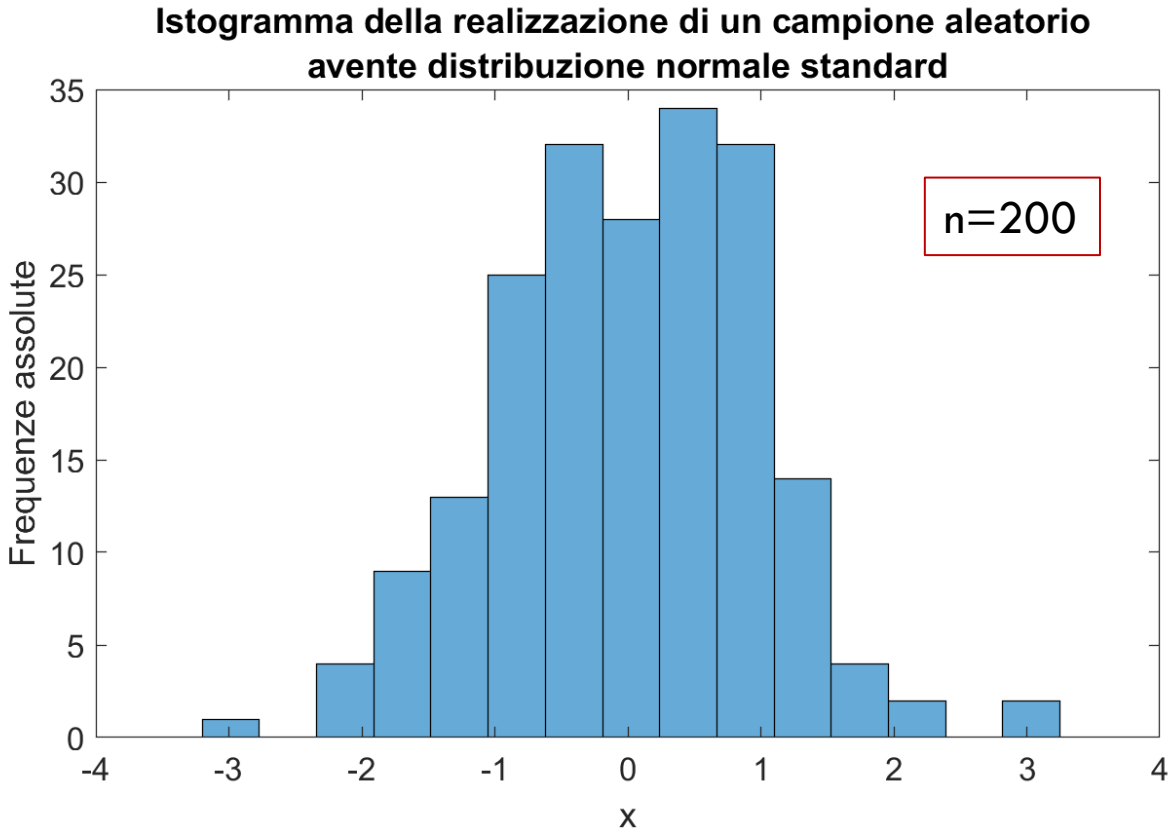
- Ipotizziamo che i valori della variabile osservata seguano una stessa distribuzione con funzione di ripartizione F(x).
- Possiamo rappresentare il campione statistico con n variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid aventi la stessa distribuzione F(x), di cui noi osserviamo una realizzazione.
  - x_1 è realizzazione di X_1, …, x_n è realizzazione di X_n
- Le variabili iid $X_1, X_2, \ldots, X_n$ costituiscono un **campione aleatorio.**

INFERENZA PARAMETRICA E NON PARAMETRICA

- In pratica la distribuzione F(x) non è mai completamente nota.
- Si usano i dati del campione statistico per fare delle inferenze su F(x).
- **Inferenza parametrica**: F(x) è parzialmente nota, eccetto alcuni parametri incogniti.
  - Esempio: F(x) è una normale con media e varianza incognite. Si usano i dati di un campione statistico per fare inferenze su questi parametri incogniti.
- **Inferenza non parametrica**: F(x) è del tutto sconosciuta.

CAMPIONE NORMALE

- Campione aleatorio di n variabili aleatorie normali con media μ e varianza σ^2.
- Nella pratica molti campioni statistici possono essere rappresentati come campioni normali.
- L'**istogramma** di una realizzazione di un campione normale avrà una forma a campana che ricorda quella della ddp normale.



INDICI DI FORMA NELLA STATISTICA DESCRITTIVA

- Ora che abbiamo definito che cos'è un campione normale, torniamo un momento alla **statistica descrittiva** e definiamo gli indici di forma.
- **Indici di forma:** indici statistici che ci forniscono un'indicazione sulla forma che assume la distribuzione di un campione statistico, in particolare dandoci un'idea di quanto questa si discosti dalla distribuzione di un campione normale.
  - Indice di asimmetria o skewness campionaria
  - Indice di curtosi campionaria

INDICE DI ASIMMETRIA O SKEWNESS

Indice di asimmetria o skewness, γ_1, di una variabile aleatoria X: il rapporto tra il suo momento centrale di ordine 3, μ_3, e la sua deviazione standard, σ, al cubo:

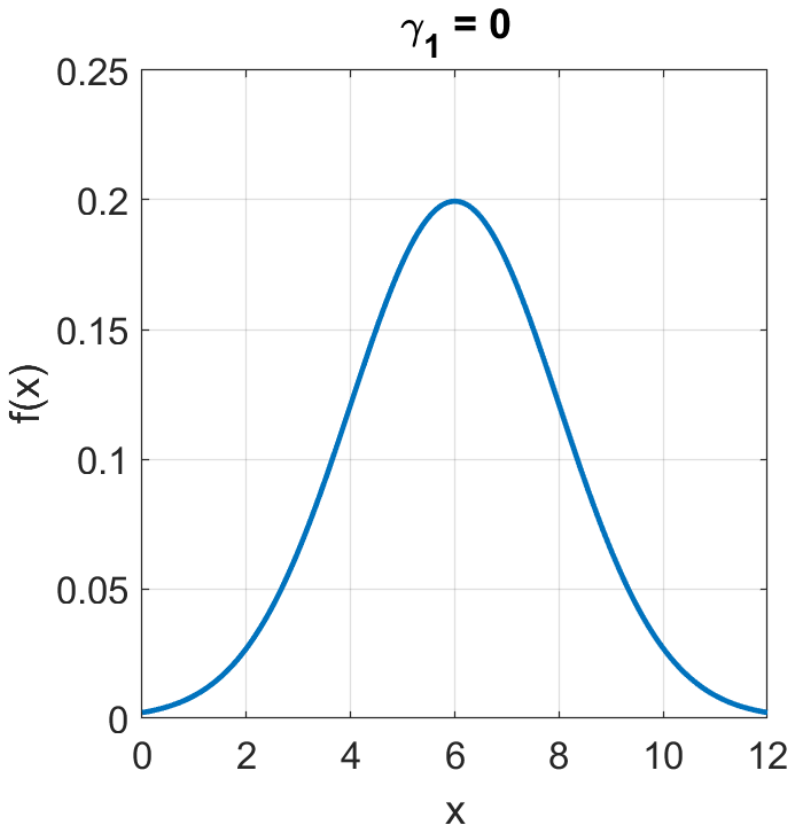
$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

$$\mu_3 = E[(X - E[X])^3], \qquad \sigma = \sqrt{E[(X - E[X])^2]}$$

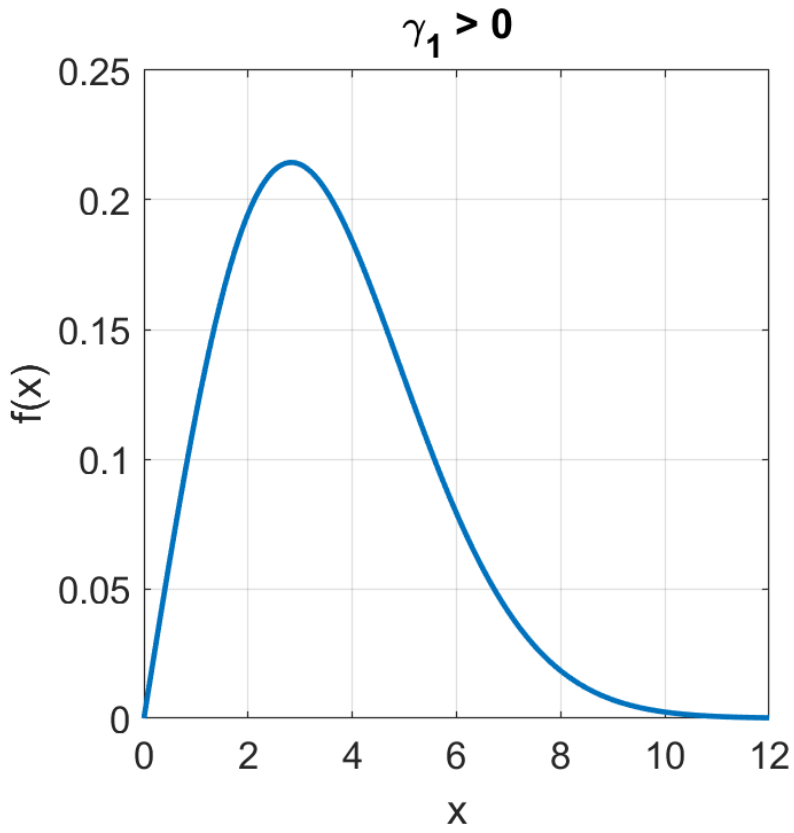
γ_1 quantifica il grado di assimmetria della ddp, se X è continua, o la funzione di massa, se X è discreta.

- $\gamma_1 = 0$ → se la ddp (o la funzione di massa) è **simmetrica**
- $\gamma_1 > 0$ → se la ddp (o la funzione di massa) è asimmetrica con una coda verso destra → **asimmetria positiva**
- $\gamma_1 < 0$ → se la ddp (o la funzione di massa) è asimmetrica con una coda verso sinistra → **asimmetria negativa**

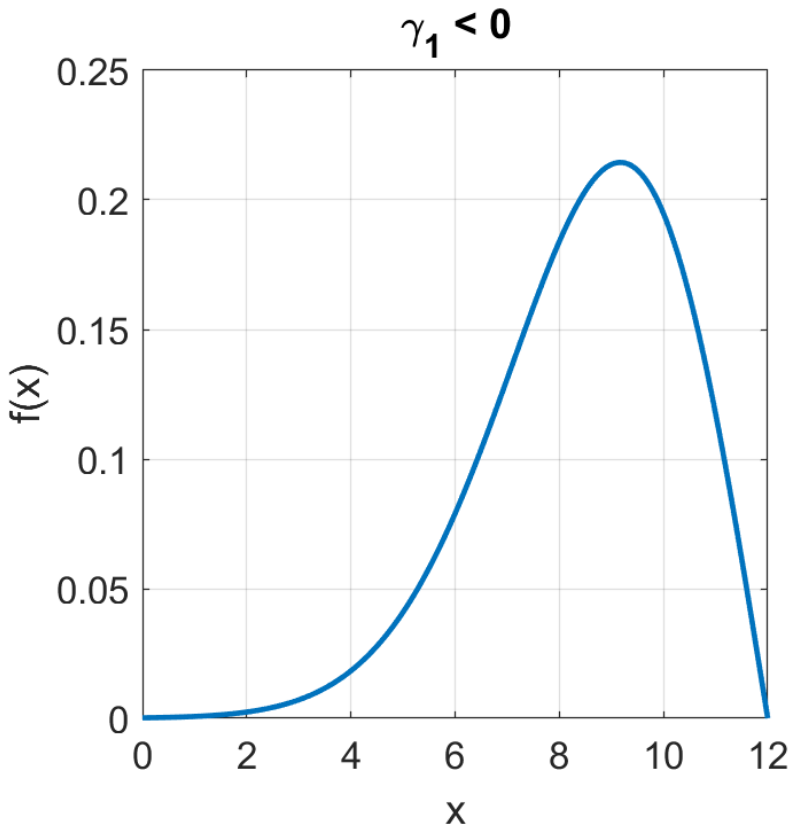
ESEMPI



Densità simmetrica



Densità con coda verso destra
→ asimmetria positiva



Densità con coda verso sinistra
→ asimmetria negativa

Attenzione a cos'è una coda in questo contesto

INDICE DI ASIMMETRIA O SKEWNESS CAMPIONARIA

Nella pratica se disponiamo di una campione statistico di n realizzazioni di variabili aleatorie distribuite come X, x_1,x_2, …, x_n, possiamo calcolare l'indice di asimmetria campionaria come:

$$g_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2)^{3/2}} \qquad \text{o} \qquad G_1 = \frac{\sqrt{n\cdot(n-1)}}{n-2}\cdot g_1$$

μ_3 e σ^3 calcolati con gli stimatori distorti

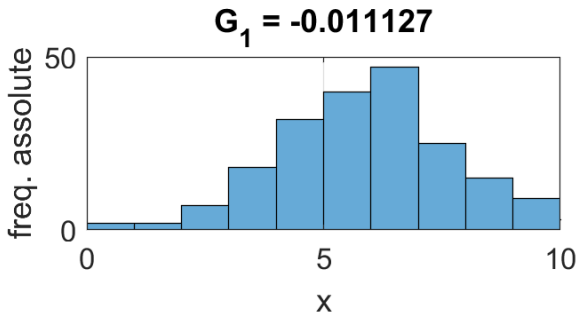
μ_3 e σ^3 calcolati con gli stimatori corretti

L'interpretazione degli indici g_1 e G_1 è analoga a quella illustrata per γ_1.

RELAZIONE TRA MEDIA E MEDIANA CAMPIONARIA NELLE DISTRIBUZIONI ASIMMETRICHE UNIMODALI

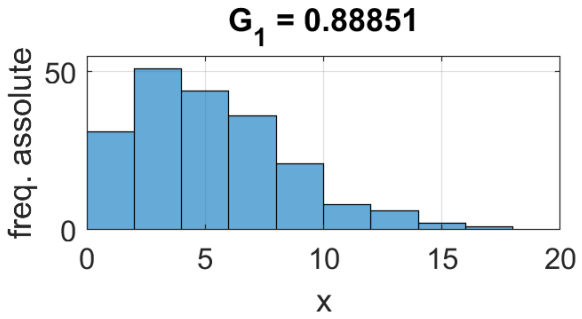
Quando la distribuzione dei dati è unimodale (c'è un solo valore a frequenza massima, ovvero la moda esiste), generalmente si ha che:

- Se la distribuzione è simmetrica → media e mediana campionaria sono molto simili tra loro



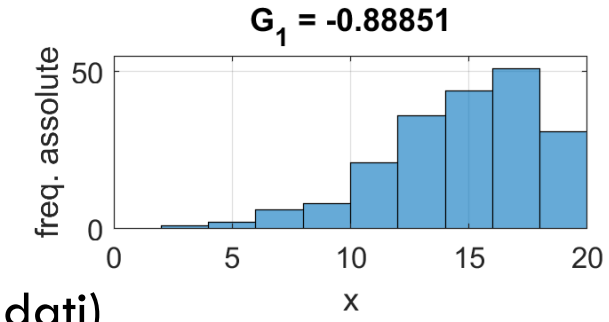
Media = 5.91
Mediana = 5.98

- Se la distribuzione ha asimmetria positiva → mediana < media



Media = 5.28
Mediana = 4.68

- Se la distribuzione ha asimmetria negativa → media < mediana



Media = 14.73
Mediana = 15.32

Nota: questa regola vale spesso ma non sempre!
(dipende dalla "lunghezza" e della coda e dalla quantità dei dati)

INDICE DI CURTOSI

Indice di curtosi, γ_2, di una variabile aleatoria X: il rapporto tra il suo momento centrale di ordine 4, μ_4, e la sua varianza al quadrato.

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\mu_4 = E[(X - E[X])^4], \qquad \sigma = \sqrt{E[(X - E[X])^2]}$$

γ_2 quantifica quanto la ddp, se X è continua, o la funzione di massa, se X è discreta, è «appuntita». Ha senso solo per distribuzioni unimodali.

- $\gamma_2 = 3$ → se la ddp (o la funzione di massa) è **normocurtica**, ovvero «appuntita» come quella di una normale
- $\gamma_2 > 3$ → se la ddp (o la funzione di massa) è **leptocurtica**, ovvero più «appuntita» di quella di una normale
- $\gamma_2 < 3$ → se la ddp (o la funzione di massa) è **platicurtica**, ovvero meno «appuntita» di quella di una normale

INDICE DI CURTOSI CAMPIONARIA

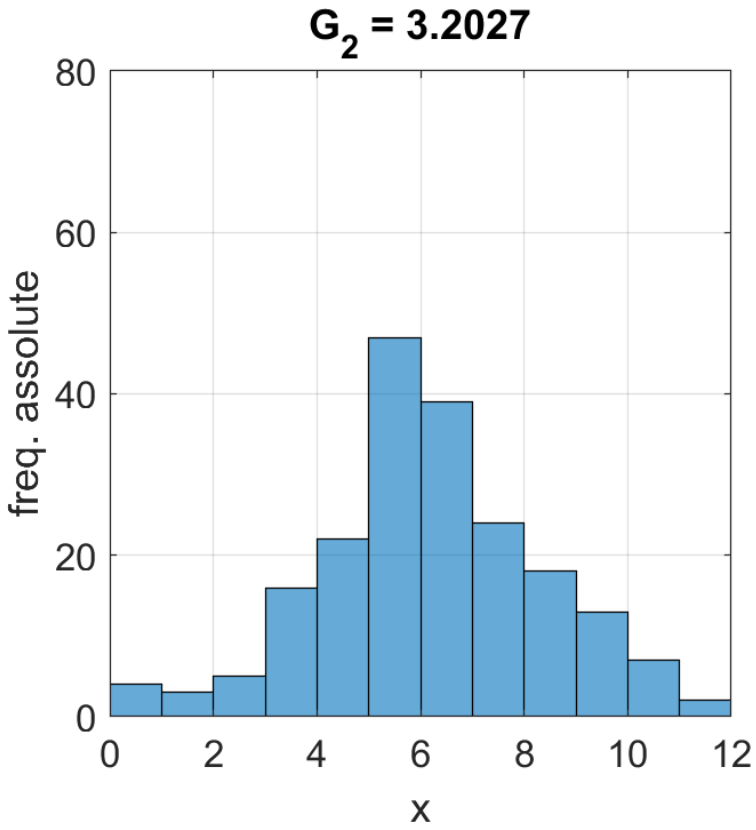
Nella pratica se disponiamo di una campione statistico di n realizzazioni di variabili aleatorie distribuite come X, x_1,x_2, …, x_n, possiamo calcolare l'indice di curtosi campionaria come:

$$g_2 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2)^2} \quad \text{o} \quad G_2 = \frac{n-1}{(n-2)\cdot(n-3)} \cdot [(n+1)g_2 - 3(n-1)] + 3$$

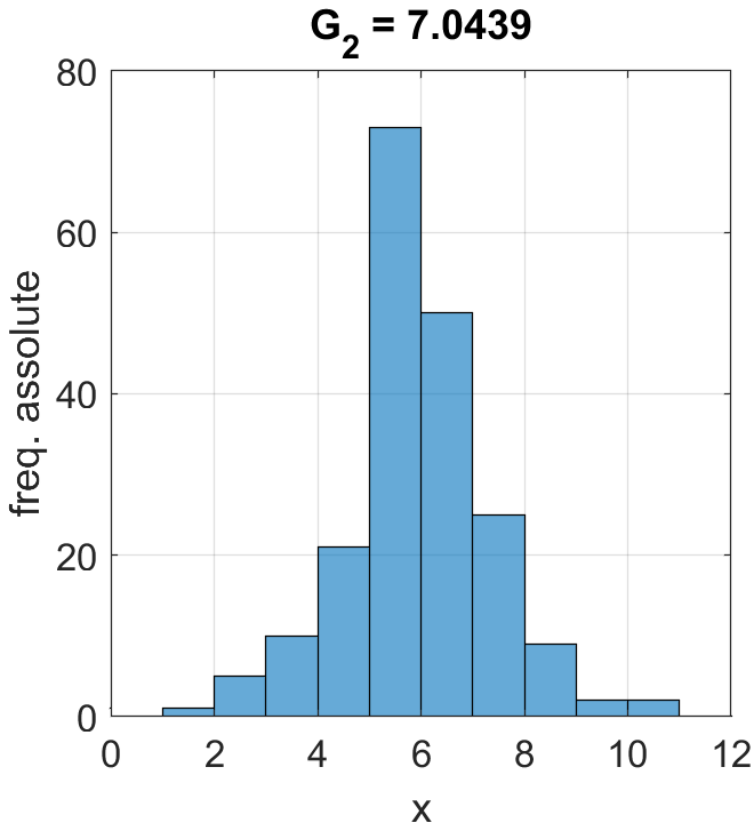
μ_4 e σ^4 calcolati con gli stimatori distorti

μ_4 e σ^4 calcolati con gli stimatori corretti

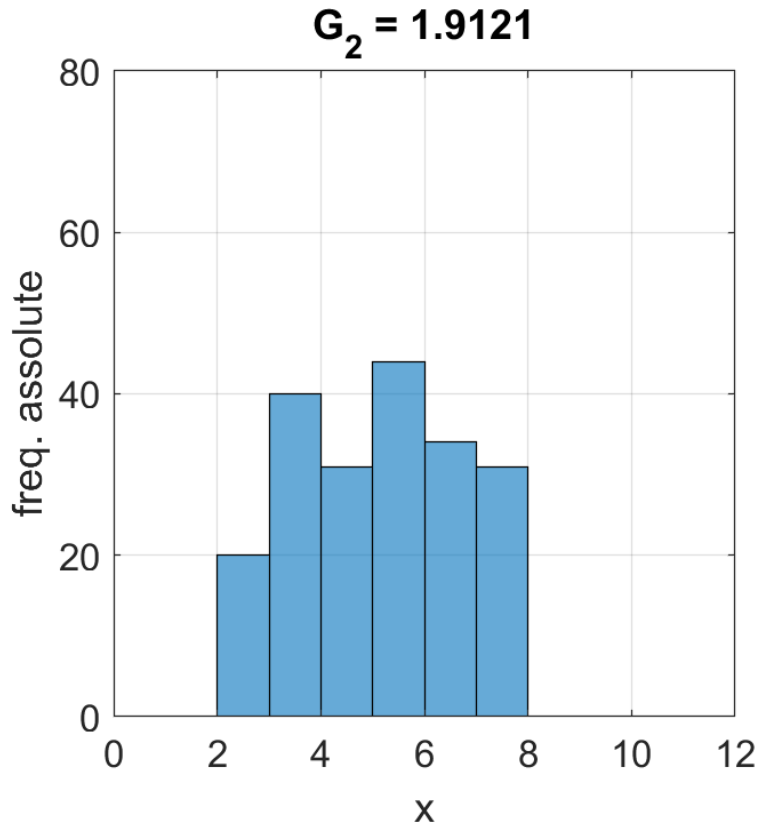
ESEMPI



Distribuzione approssimativamente normocurtica



Distribuzione leptocurtica



Distribuzione platicurtica