

(Version 2026.1)

Capitolo 1

Sguardo alla topologia

1.1 Gli spazi topologici e le loro proprietà base

Diamo preliminarmente uno sguardo rapidissimo ad alcune proprietà elementari degli spazi topologici, che serviranno da base per la costruzione delle varietà differenziabili e si dovrebbero avere presenti.

1.1.A Topologie. In tutta questa sezione X è un insieme; denotiamo i suoi punti $p, q, x, y, \dots$

Definizione 1.1 *Una topologia su un insieme X è una collezione (o famiglia, o insieme: qui sono tutti sinonimi) $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X , chiamati aperti, con le seguenti proprietà:*

- i. $\emptyset$ ed X appartengono a $\mathcal{T}$.*
 - ii. Ogni unione di insiemi di $\mathcal{T}$ appartiene a $\mathcal{T}$.*
 - iii. Ogni intersezione di un numero finito di insiemi di $\mathcal{T}$ appartiene a $\mathcal{T}$.*
- $(X, \mathcal{T})$ si chiama spazio topologico.*

Quindi, una topologia consiste nella scelta di una famiglia di sottoinsiemi che si considerano aperti e che è “chiusa” per unioni arbitrarie e intersezioni finite. Su un dato insieme si possono (in generale, a meno che esso consista di un solo elemento) mettere diverse topologie.

Esempi 1. Qualunque sia l'insieme X , $\{\emptyset, X\}$ è una topologia su X , chiamata *topologia banale*.

2. Qualunque sia X , la famiglia costituita da tutti i sottoinsiemi di X è una topologia su X , chiamata *topologia discreta*. In questa topologia, i singoletti $\{p\}$, $p \in X$, sono aperti.

3. Sia X uno spazio metrico, con metrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. (Una metrica è una qualunque funzione simmetrica, non negativa, che soddisfa $d(p, q) = 0$ se e solo se $p = q$ e che soddisfa la disuguaglianza triangolare). Per ogni $p \in X$ e $r > 0$ si definisce la *palla aperta di centro p e raggio r* come

$$B_r(p) := \{q \in X : d(q, p) < r\}.$$

Si definisce poi la *topologia $\mathcal{T}_d$ indotta dalla metrica* come la topologia nella quale gli aperti sono, oltre a $\emptyset$, i sottoinsiemi $A \subseteq X$ che contengono una palla aperta centrata in ciascuno dei loro punti (per ogni $p \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(p) \subseteq A$).

Verifichiamo che tale famiglia di sottoinsiemi costituisce effettivamente una topologia. (i.) Per definizione, ogni palla $B_r(p)$ centrata in un punto p e di qualunque raggio $r > 0$ contiene p ed è contenuta in X . Dunque $X \in \mathcal{T}_d$. (ii.) Un punto p che appartiene ad un'unione di aperti di $\mathcal{T}_d$ appartiene ad almeno uno di essi, che quindi contiene una palla aperta centrata in p ; pertanto anche l'unione la contiene, e quindi è aperta. (iii.) Basta verificare questa proprietà per l'intersezione di due aperti, perché poi il caso di un qualunque numero (finito) di essi segue per induzione. Siano $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_d$ e sia $p \in A_1 \cap A_2$ (se A_1 ed A_2 sono disgiunti non c'è nulla da verificare perché $\emptyset \in \mathcal{T}_d$). Allora esistono $r_1 > 0$ ed $r_2 > 0$ tali che $B_{r_1}(p) \subseteq A_1$ e $B_{r_2}(p) \subseteq A_2$. Dunque la palla aperta $B_{\min(r_1, r_2)}(p)$ è contenuta sia in A_1 che A_2 , e dunque in $A_1 \cap A_2$.

4. Nel seguito, con $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, intendiamo lo spazio topologico $\mathbb{R}^n$ con la topologia indotta dalla metrica euclidea ($d(p, q) = \|p - q\|$ con $\| \cdot \|$ la norma indotta dal prodotto scalare euclideo). In particolare, in $\mathbb{R}$ le palle aperte $B_r(p)$ sono gli intervalli aperti $(p - r, p + r)$.

5. Uno spazio vettoriale normato è uno spazio topologico con la topologia indotta dalla metrica data dalla norma.

6. Su uno spazio vettoriale finito-dimensionale norme diverse inducono metriche diverse ma la stessa topologia.

7. La topologia di uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ induce una topologia su ogni sottoinsieme S di X , chiamata *topologia relativa* di S e definita così: gli aperti di S nella topologia relativa sono le intersezioni di S con gli aperti di X . Se munito della sua topologia relativa, dunque, ogni sottoinsieme di uno spazio topologico è aperto (anche se non lo è necessariamente nella topologia dello spazio).

Esercizi 1.1.1 (i) Mostrare con un esempio che l'intersezione di un'infinità (anche numerabile) di aperti non è necessariamente aperta. [Suggerimento: per esempio considerare gli intervalli aperti $B_{1+\frac{1}{n}}(0) = \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, in $\mathbb{R}$]

(ii) Quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono aperti nella topologia relativa: $(0, 1)$, $[0, 1)$, $[0, 1]$? [R]

(iii) Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbb{R}^2 \ni x = (x_1, x_2)$ formato dall'unione della palla aperta $B_1((0, 0))$ e della semicirconferenza $\{x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 > 0\}$. È un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$? Quali dei seguenti sottoinsiemi di S sono aperti nella topologia di $\mathbb{R}^2$ e quali nella topologia relativa di S : $S_1 := S \cap \{x_2 > 0\}$, $S_2 := S \cap \{x_2 < 0\}$, $S_3 := \{x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{2}\}$? [R]

1.1.B Basi di una topologia. Per definire una topologia non è necessario assegnarne *tutti* gli aperti, ma basta assegnarne una sottofamiglia opportunamente grande che genera, per unione, tutti gli altri aperti.

Definizione 1.2 Una base per un insieme X è una collezione $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha \in J\}$ (con J un qualche insieme di indici) tale che

- i. $\cup_{\alpha \in J} B_\alpha = X$ (gli elementi di $\mathcal{B}$ “coprono” X).
- ii. Per ogni coppia $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ di elementi di $\mathcal{B}$ tali che $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ ed ogni $p \in B_1 \cap B_2$ esiste un elemento di $\mathcal{B}$ che contiene p ed è contenuto in $B_1 \cap B_2$.

La proprietà ii. implica che l'intersezione di due (e quindi di ogni numero finito) di insiemi della base $\mathcal{B}$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Proposizione 1.3 Se $\mathcal{B}$ è una base di X , allora la collezione $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ formata da tutte le unioni di elementi di $\mathcal{B}$ e dall'insieme vuoto¹ è una topologia su X .

Dimostrazione. Ovviamente $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ contiene $\emptyset$, X e tutte le unioni dei suoi elementi. L'unica proprietà che resta da verificare, per dimostrare che $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è una topologia, è che l'intersezione di due suoi elementi (e quindi di ogni numero finito di essi), diciamo $\cup_{\alpha \in J_1} B_\alpha$ e $\cup_{\beta \in J_2} B_\beta$ con $J_1, J_2 \subset J$, appartiene a $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Ma $(\cup_{\alpha \in J_1} B_\alpha) \cap (\cup_{\beta \in J_2} B_\beta) = \cup_{\alpha, \beta} B_\alpha \cap B_\beta$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$ perché, come osservato, ciascun $B_\alpha \cap B_\beta$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$. ■

Nella situazione della Proposizione 1.3, $\mathcal{B}$ è chiamata una *base* della topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, e $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è chiamata la *topologia generata* da $\mathcal{B}$. In generale, la base di una topologia può non essere unica.

¹Sui testi, spesso non si specifica la presenza di $\emptyset$ perché si adotta, più o meno tacitamente, la convenzione che fra tutte le unioni ci sia anche quella di zero elementi, che è vuota.

Esempi 1. Una base della topologia discreta di un insieme X è formata dai suoi singoletti $\{p\}$, $p \in X$.

2. Una base della topologia metrica di uno spazio metrico è costituita dalle palle aperte $B_r(p)$, $p \in X$, $r > 0$. (Si vedano gli esercizi più sotto).

3. Una base della topologia metrica di $\mathbb{R}^n$ è costituita dalle palle aperte $B_r(p)$ con centri p con coordinate razionali e raggi $r > 0$ razionali; si noti che tale base è numerabile. (Si vedano gli esercizi più sotto).

4. Se $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ sono spazi topologici, il prodotto cartesiano $X_1 \times \dots \times X_n$ può essere munito della *topologia prodotto*, generata dagli insiemi $A_1 \times \dots \times A_n$ con $A_1 \in \mathcal{T}_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}_n$.

Esercizi 1.1.2 (i) Sia $\mathcal{T}$ una topologia e sia $\mathcal{B}$ una sottofamiglia di $\mathcal{T}$ che contiene $\emptyset$ e copre X e con la proprietà che per ogni $A \in \mathcal{T}$ e $p \in A$ esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $p \in B \subseteq A$. Mostrare che $\mathcal{T}$ è generata da $\mathcal{B}$. [R]

(ii) Mostrare, o convincersi del fatto (per esempio analizzando il caso $n = 1$), che se due palle aperte in $\mathbb{R}^n$ hanno un punto in comune allora contengono una palla aperta centrata in quel punto. Dedurre l'esempio (ii). [S]

(iii) Provare l'esempio 3. (o almeno convincersi della sua veridicità).

(iv) Verificare (o almeno convincersi) che la topologia prodotto di $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, con ciascun $\mathbb{R}$ con la topologia usuale, coincide con la sua topologia di spazio metrico. [S]

1.1.C Nozioni elementari. Richiamiamo ora rapidamente alcune nozioni elementari, probabilmente già incontrate, nei corsi propedeutici, nello studio della topologia metrica di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.4 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico.

- i. Un sottoinsieme C di X è chiuso se $X \setminus C$ è aperto.
- ii. Un intorno di un punto $p \in X$ è un aperto che contiene p .
- iii. Una successione $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ di punti di X converge a $p^* \in X$ se “entra definitivamente” in ogni intorno di p^* , cioè per ogni intorno U di p^* esiste $N > 0$ tale che $p_n \in U$ per ogni $n > N$. In questa situazione si dice anche che la successione ha limite p^* o che p^* ne è un punto limite e si scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = p^*$ o $p_n \rightarrow p^*$.
- iv. La chiusura $\overline{S}$ di un sottoinsieme S di X è il più piccolo chiuso che contiene S (ovvero, l'intersezione di tutti i chiusi che contengono S).
- v. L'interno $\text{int}(S)$ di un sottoinsieme S di X è il più grande aperto contenuto in S (ovvero, l'unione di tutti gli aperti contenuti in S).
- vi. Un punto $p \in X$ è di accumulazione per un sottoinsieme S di X se ogni intorno di p contiene punti di S distinti da p .

vii. $p \in X$ è un punto di frontiera per un sottoinsieme S di X se ogni intorno di p contiene punti di S e punti di $X \setminus S$. La frontiera ∂S di S è il sottoinsieme di X formato da tutti i punti di frontiera.

Sottolineiamo che tutte queste proprietà dipendono dalla topologia su X . Per esempio, il fatto che una successione converga, e quale o quali siano i suoi punti limite, è una proprietà sia della successione che della topologia (si vedano gli esercizi).

Esercizi 1.1.3 (i) È vero che, se X è uno spazio topologico, allora sia X che $\emptyset$ sono sia aperti che chiusi? Perché? [R]

(ii) È vero che ogni intersezione di chiusi e ogni unione finita di chiusi sono chiusi? Perché? [S]

(iii) Vi è una topologia nella quale, per ogni $p \in X$, il singoletto $\{p\}$ è un intorno di p ? [R]

(iv) I singoletti $\{p\}$, $p \in X$, sono chiusi in ogni spazio topologico $(X, \mathcal{T})$? [R]

(v) Mostrare che, nella topologia banale, ogni punto di X è punto limite di ogni successione di punti. [R]

(vi) È vero che, qualunque sia la topologia, la successione costante $\{p_n = p\}$ converge a p ? Potrebbe, a seconda della topologia, avere altri punti limite? [R]

(vii) Quali sono le successioni convergenti nella topologia discreta? [R]

(viii) Mostrare (o almeno sviluppare un chiaro convincimento su) i seguenti fatti:

(a) $p \in \overline{S}$ se e solo se ogni intorno di p contiene punti di S .

(b) $p \in \text{int}(S)$ se e solo se esiste un intorno di p contenuto in S .

(c) $\partial S = \overline{S} \setminus \text{int}(S)$.

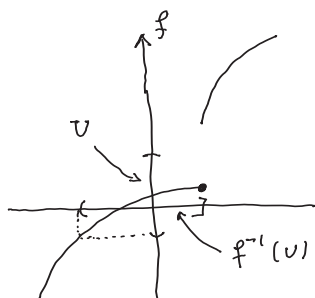
(d) È vero che i punti limite di una successione convergente sono di accumulazione per la successione?

1.2 Funzioni continue

1.2.A Continuità. La nozione di continuità di funzioni fra spazi topologici è centrale. Essa è una naturale generalizzazione di quella, ben nota, per funzioni fra spazi metrici. Tuttavia, a differenza di quanto si fa nei corsi di analisi, non si è interessati alla continuità in un punto (non si fa analisi locale nei punti di discontinuità) ed inoltre si adotta una caratterizzazione a prima vista diversa da quella alla quale si è abituati negli spazi metrici, e la cui utilità si apprezza nell'uso.

Definizione 1.5 Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione fra due spazi topologici.

- i. f è continua se la preimmagine² $f^{-1}(A)$ di ogni aperto A di Y è un aperto di X .
- ii. f è un omeomorfismo se è continua, invertibile ed ha inversa continua.



Per comprendere come questa definizione catturi, nel semplice caso di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, la presenza di discontinuità si osservi la figura a lato.

Esempi Facciamo alcuni esempi, lasciando le facili verifiche come esercizio:

1. Se su X c'è la topologia discreta, oppure se su Y c'è la topologia banale, allora ogni funzione $f : X \rightarrow Y$ è continua.³
2. Se $f : X \rightarrow Y$ è continua e $x_n \rightarrow x$ allora $f(x_n) \rightarrow f(x)$.
3. Sia $f : X \rightarrow Y$ con $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$. Allora $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ con $f_j(x) \in Y_j$ per ogni j . Le funzioni $f_j : X \rightarrow Y_j$ così definite sono le “componenti” di f . Se Y è equipaggiato con la topologia prodotto, allora f è continua se e solo se le sue componenti lo sono.
4. Sia $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ un prodotto cartesiano di n spazi topologici. Per ogni $i = 1, \dots, n$, la mappa

$$\pi_i : X \rightarrow X_i, \quad \pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i, \quad (1.2.1)$$

si chiama *proiezione sull'i-mo fattore*. Se X è equipaggiato con la topologia prodotto, allora ciascuna π_i è continua.

L'usuale definizione di continuità del caso metrico suggerisce la seguente definizione topologica di continuità: una funzione $f : X \rightarrow Y$ è continua se per ogni $x \in X$ ed ogni intorno V di $f(x)$ in Y esiste un intorno U di x in X tale che $f(U) \subseteq V$ (si veda l'esercizio 1.2.1). Questo è in effetti equivalente alla definizione 1.5 che abbiamo adottato

Proposizione 1.6 Una funzione $f : X \rightarrow Y$ fra due spazi topologici è continua (secondo la definizione 1.5) se e solo se per ogni $x \in X$ ed ogni intorno V di $f(x)$ esiste un intorno U di x tale che $f(U) \subseteq V$.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua. Consideriamo un punto $x \in X$ ed un intorno V di $f(x)$. Allora $U := f^{-1}(V)$ è un aperto

²Ricordiamo: se $A \subseteq Y$, $f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$; se $A \subseteq X$, $f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\}$.

³A lezione è stato anche detto: se su X c'è la topologia banale, allora solo le funzioni costanti sono continue; tuttavia, questo è vero solo sotto qualche ipotesi aggiuntiva sulla topologia di Y , per esempio che essa sia Hausdorff.

che contiene x , e dunque un intorno di x . Inoltre, $f(U) \subseteq V$ (vedere l'esercizio 1.2.1.v).

Viceversa, supponiamo che per ogni x ed ogni intorno V di $f(x)$ esista un intorno U di x tale che $f(U) \subseteq V$. Consideriamo un aperto $A \subseteq Y$. Se $f^{-1}(A) = \emptyset$ abbiamo concluso perché $\emptyset$ è aperto. Supponiamo che $f^{-1}(A)$ non sia vuoto. Consideriamo un qualunque punto $x \in f^{-1}(A)$. Allora A è un intorno di $f(x)$ e dunque, per ipotesi, esiste un intorno U di x tale che $f(U) \subseteq A$. Di conseguenza $U \subseteq f^{-1}(A)$. Questo prova che $f^{-1}(A)$ contiene un intorno di ogni suo punto e pertanto è aperto. ■

Esercizi 1.2.1 (i) Mostrare che, se X ed Y sono spazi topologici, l'identità $\text{id} : X \rightarrow X$ e ogni funzione costante da X a Y sono continue.

(ii) Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua (rispettivamente, un omeomorfismo) fra due spazi topologici ed S un sottoinsieme di X . Mostrare che la restrizione $f|_S$ di f ad S , riguardata come funzione da S a $f(S)$, è continua (rispettivamente, un omeomorfismo) se S ed $f(S)$ sono equipaggiati con la topologia relativa.

(iii) Mostrare che per provare che una funzione $f : X \rightarrow Y$ fra due spazi topologici è continua basta verificare che la preimmagine di ogni aperto di una base della topologia di Y sia aperta.

(iv) Verificare che l'usuale definizione di continuità in un punto x fra spazi metrici ($\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $d(y, x) < \delta$ implica $d(f(y), f(x)) < \varepsilon$) si può formulare così: per ogni palla aperta $B_{f(x)} \subset Y$ centrata in $f(x)$ esiste una palla aperta $B_x \subset X$ tale che $f(B_x) \subseteq B_{f(x)}$.

(v) Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione e $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$. In generale, da $U = f^{-1}(V)$ segue $f(U) = V$ o solo $f(U) \subseteq V$? [R]

1.2.B Omeomorfismi. In generale, una funzione continua non trasforma aperti in aperti. Per esempio, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione $f(x) = x^2$, che è ovviamente continua, $(-1, 1)$ è aperto ma $f((-1, 1)) = [0, 1)$ non lo è. Però:

Proposizione 1.7 Se $f : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo, allora sia f che f^{-1} trasformano aperti in aperti.

Dimostrazione. Per f^{-1} questo segue dalla continuità di f e per f (che è l'inversa di f^{-1}) da quella di f^{-1} . ■

Di conseguenza, un omeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ fra due spazi topologici $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ induce una corrispondenza biunivoca fra le due topologie (ad ogni $A \in \mathcal{T}_X$ corrisponde $f(A)$ in $\mathcal{T}_Y$ e a ogni $A \in \mathcal{T}_Y$ corrisponde $f^{-1}(A)$ in $\mathcal{T}_X$). In un certo senso, le due topologie sono la stessa, a meno dell'omeomorfismo, e i due spazi hanno le stesse "proprietà topologiche".

Precisamente, una "proprietà topologica" o "invariante topologica" è una proprietà che, se è posseduta da uno spazio topologico, è posseduta

anche da tutti quelli ad esso omeomorfi. Nelle prossime sezioni esaminiamo alcune di esse (connessione, compattezza, Hausdorff). La loro importanza è dovuta al fatto che negli spazi che le possiedono succedono cose particolari (per esempio, particolarmente buone) e anche al fatto che due spazi topologici che differiscano anche per una sola proprietà topologica non possono essere omeomorfi.

Esercizi 1.2.2 (i) *Mostrare, o almeno convincersi, che la funzione*

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow B_1(0), \quad f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|},$$

è un omeomorfismo fra $\mathbb{R}^n$ e la sua palla aperta unitaria di centro l'origine.

(ii) *Denotiamo $\|\cdot\|_2$ la norma euclidea e $\|\cdot\|_\infty$ quella del sup in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Denotiamo inoltre*

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}, \quad C^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\},$$

la sfera unitaria e la frontiera del cubo unitario di dimensione $n - 1$. Mostrare che la funzione

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad f(x) = \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} x,$$

è un omeomorfismo, con inversa $f^{-1}(x) = \frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty} x$, e che la sua restrizione a C^{n-1} è un omeomorfismo fra C^{n-1} e S^{n-1} .

(iii) *Mostrare che la composizione $g \circ f : X \rightarrow Z$ di due omeomorfismi $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ è un omeomorfismo. [R]*

(iv) *Sulla base dell'esercizio precedente, mostrare che l'insieme degli omeomorfismi di uno spazio topologico in sè forma un gruppo⁴ con operazione gruppale la composizione, elemento neutro l'identità ed inversa l'inversione di funzioni.*

⁴Un gruppo è un insieme G con un'operazione associativa $G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh$, a volte chiamata prodotto, e tale che esistano un elemento neutro e ($ge = eg = g \forall g \in G$) e, per ogni elemento $g \in G$ un inverso $g^{-1} \in G$ ($gg^{-1} = g^{-1}g = e$). G è *abeliano* se $gh = hg$ per ogni $g, h \in G$, *nonabeliano* altrimenti. Ben noti esempi di gruppi abeliani sono $\mathbb{Z}$ con la somma come operazione gruppale, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con il prodotto come operazione gruppale, ogni spazio vettoriale con la somma vettoriale come operazione gruppale. Importantissimi gruppi nonabeliani sono l'insieme $GL(n, \mathbb{R})$ delle matrici invertibili $n \times n$ ed i suoi sottogruppi, che considereremo nel seguito come esempi di gruppi di Lie.

1.3 Alcune proprietà topologiche

1.3.A Connessione

Definizione 1.8

- i. Uno spazio topologico è connesso se non è l'unione di due aperti disgiunti e non vuoti.
- ii. Un sottoinsieme di uno spazio topologico è connesso se lo è come spazio topologico con la topologia relativa.

Se X non è connesso, allora $X = X_1 \cup X_2$ con X_1 e X_2 aperti, non vuoti e disgiunti. Ma allora $X_2 = X \setminus X_1$ e $X_1 = X \setminus X_2$ sono chiusi. Dunque, equivalentemente, X è connesso se e solo se gli unici suoi sottoinsiemi simultaneamente aperti e chiusi sono X e $\emptyset$ (si veda l'esercizio 1.1.3.i).

Esempi 1. Intuitivamente, si pensa alla connessione come proprietà di un insieme, ma essa richiede una topologia sull'insieme e dipende da essa. Si consideri per esempio l'insieme X costituito dall'unione di due palle aperte disgiunte $B_1(p_1) \cup B_1(p_2)$ in $\mathbb{R}^n$. Se equipaggiamo X con la topologia di sottospazio allora, come già osservato, $B_1(p_1)$ e $B_1(p_2)$ sono aperti e dunque X non è connesso. Questa è in effetti l'idea sottostante la definizione di connessione. Ma se su X mettiamo la topologia banale, allora X è connesso.

2. Gli unici sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ sono gli intervalli (e i punti). I razionali e irrazionali sono sottoinsiemi non connessi di $\mathbb{R}$.

3. Il prodotto di spazi connessi è connesso.

4. L'unione di sottoinsiemi connessi di uno spazio topologico che contengano un punto comune è connessa.

Supponiamo ora che $(X, \mathcal{T})$ non sia connesso. Ogni suo punto p è certamente contenuto in una collezione di sottoinsiemi connessi (perché $p \in \{p\}$ che è connesso). La loro unione, che è connessa perché tutti contengono p , è il più grande (rispetto all'inclusione) sottoinsieme connesso di X che contiene p e si chiama la *componente connessa* di X che contiene (o “di”) p .

Proposizione 1.9 Sia $f : X \rightarrow Y$ continua. Se $S \subseteq X$ è connesso allora $f(S)$ è connesso.

Dimostrazione. Consideriamo la restrizione di f ad S , riguardandola come una funzione $g := f|_S : S \rightarrow f(S)$ e, se S e/o $f(S)$ sono sottoinsiemi propri di X ed Y , equipaggiamoli con la topologia relativa. (La restrizione ad S serve se $S \neq X$ e quella del codominio ad $f(S)$ se

$f(S) \neq Y$). La funzione g è continua (esercizio 1.2.1.ii). Per assurdo, $f(S) = g(S)$ non sia connesso, cioè $g(S) = Y_1 \cup Y_2$ con aperti non vuoti e disgiunti $Y_1, Y_2 \subset f(S)$. Allora $S = g^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = g^{-1}(Y_1) \cup g^{-1}(Y_2)$ è l'unione di due aperti non vuoti (perché g è suriettiva e Y_1 e Y_2 sono non vuoti) e disgiunti (se avessero un punto x in comune allora $f(x)$ dovrebbe appartenere sia a Y_1 che a Y_2 , che sono però disgiunti). Dunque S non sarebbe connesso, e questo è assurdo. ■

Di conseguenza, la connessione è un invariante topologico.

Osservazione:⁵ (*Connessione per archi*) Per completezza (e per confronto con i corsi precedenti, nei quali questa nozione è stata probabilmente introdotta) richiamiamo rapidamente un'altra, (un po') diversa nozione di connessione. Un *cammino* che congiunge due punti x, y di uno spazio topologico X è una funzione continua

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X$$

tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Uno spazio topologico è detto *connesso per archi* se ogni coppia di suoi punti è congiunta da un cammino. Anche la connessione per archi è un invariante topologico. Inoltre, la connessione per archi di uno spazio topologico implica la sua connessione, ma il viceversa non è, in generale, vero. È però vero se, per esempio, X è localmente euclideo (un concetto che introdurremo più avanti) o, più generalmente, localmente connesso per archi, ovvero esiste una base della topologia formata da insiemi connessi per archi.

1.3.B Compattezza La compattezza è una proprietà degli spazi topologici che, se presente, li rende in molti aspetti speciali e con proprietà molto forti. Generalizza agli spazi topologici i sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$ (nei quali, per esempio, tutte le successioni hanno sottosuccessioni convergenti, le soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie in essi intrappolate esistono per tutti i tempi, ...).

Un *ricoprimento* di un insieme X è una famiglia di sottoinsiemi di X la cui unione è X stesso (“copre” X). Equivalentemente, ogni punto di X appartiene ad almeno un elemento del ricoprimento. Se X è uno spazio topologico, e i sottoinsiemi del ricoprimento sono aperti, allora si dice che il ricoprimento è aperto. Un *sottoricoprimento* di un ricoprimento è una sottofamiglia che ancora copre X .

⁵Le osservazioni, in un testo, possono avere diverse finalità. Qui servono ad introdurre commenti o informazioni che possono essere di aiuto ma non sono strettamente necessarie per la comprensione degli argomenti del corso.

Definizione 1.10

- i. Uno spazio topologico è compatto se ogni ricoprimento aperto contiene un sottoricoprimento finito.
- ii. Un sottoinsieme di uno spazio topologico è compatto se lo è nella topologia relativa.

Si noti che ovviamente non si richiede l'esistenza di *un* ricoprimento aperto finito (che esiste sempre), ma che *qualunque* ricoprimento ne contenga uno finito.

Esempi 1. Ogni spazio topologico con la topologia banale è compatto.

2. Uno spazio topologico con la topologia discreta è compatto se e solo se è costituito da un numero finito di punti.

3. In ogni spazio topologico, i singoletti sono compatti e l'unione finita di compatti è compatta.

4. Il prodotto di spazi compatti è compatto.

5. Gli intervalli aperti $(-n, n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, coprono $\mathbb{R}$, ma nessun numero finito di essi lo fa. Dunque, $\mathbb{R}$ non è compatto. Similmente, gli intervalli aperti $(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$ coprono $(0, 1)$, ma nessuna sottofamiglia finita di essi lo fa, e $(0, 1)$ non è compatto.

6. In uno spazio metrico i compatti sono chiusi e limitati, ma il viceversa in generale non è vero. In uno spazio normato finito-dimensionale, invece, i compatti sono esattamente i chiusi e limitati.

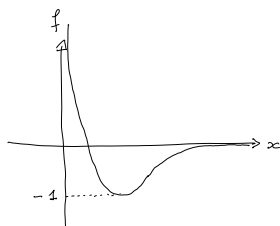
7. I sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ di dimensione ≥ 1 sono chiusi, ma non sono limitati e dunque non sono compatti.

8. Se X è compatto, ogni funzione continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ha massimo e minimo.

La definizione di compattezza può apparire tecnica. Operativamente, essa permette spesso di dedurre proprietà globali di uno spazio topologico a partire da informazioni locali, valide per esempio in opportuni intorni dei suoi punti. Questi intorni formano un ricoprimento aperto e la compattezza permette di ridurlo a un numero finito di essi. In molti argomenti, la finitezza consente di combinare le informazioni locali e ottenere una conclusione globale. Per questo motivo, la compattezza segna una differenza sostanziale nel comportamento globale degli spazi topologici: molte proprietà che in generale possono fallire diventano vere, o assumono una forma più forte, nel caso compatto.

Inoltre, la compattezza è un invariante topologico:

Proposizione 1.11 *Se $f : X \rightarrow Y$ è continua ed $S \subseteq X$ è compatto, allora $f(S)$ è compatto.*



Osservazioni: (i) Uno spazio topologico X è chiamato *sequenzialmente compatto* se ogni successione di punti ha una sottosuccessione convergente. Negli spazi metrici, compattezza e compattezza sequenziale coincidono.

(ii) La preimmagine di un compatto sotto una funzione continua non è generalmente compatta. Per esempio, nell'esempio mostrato a lato di una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con il grafico indicato, $f^{-1}([-1, 0]) = \mathbb{R}$. Le funzioni con la proprietà che le preimmagini dei compatti siano compatte sono chiamate *proprie*.

Esercizi 1.3.1 (i) Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. I suoi insiemi di livello⁶ limitati sono compatti? [R]

(ii) La topologia di uno spazio compatto ha sempre una base finita? [R]

1.3.C Hausdorff. Un'altra proprietà importante di uno spazio topologico è la possibilità di “separare” i punti per mezzo di intorni. Vi sono varie formulazioni. La più importante è la seguente:

Definizione 1.12 *Uno spazio topologico, e la sua topologia, sono Hausdorff se punti distinti hanno intorni disgiunti (per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$ esistono intorni disgiunti U_x di x e U_y di y).*

Esempi 1. Ogni spazio topologico con la topologia discreta è Hausdorff. Ogni spazio topologico con almeno due punti e con la topologia banale non è Hausdorff.

2. La topologia indotta da una metrica è Hausdorff (basta prendere due palle centrate nei due punti e di raggio minore di metà della loro distanza).

3. Il prodotto di spazi Hausdorff è Hausdorff. Se uno spazio è Hausdorff, i suoi sottoinsiemi (con la topologia relativa) sono Hausdorff.

L'essere Hausdorff è una delle proprietà che dovremo richiedere alla topologia delle varietà differenziali. Essa ha conseguenze importanti. Per esempio, in un generico spazio topologico non vi è l'unicità del limite delle successioni (si veda l'esercizio 1.1.3.iv). Invece:

Proposizione 1.13 *In uno spazio topologico Hausdorff ogni successione convergente ha un unico limite.*

Esercizi 1.3.2 (i) Dimostrare la Proposizione 1.13.

⁶Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione. Gli “insiemi di livello” o “fibre” di f sono gli insiemi $f^{-1}(c) = \{x \in X : f(x) = c\}$ per $c \in f(X)$.