

L'esame del corso di "Geometria Differenziale" è scritto e consiste nel rispondere ad alcune (probabilmente tre, ma potrebbe cambiare di volta in volta) domande scelte (dalla commissione) fra le seguenti, o a piccole varianti di esse. Il tempo a disposizione sarà comunicato di volta in volta, ma varierà fra le 2 e le 3 ore.

L'organizzazione e la strutturazione della risposta sono lasciate agli studenti. Si raccomanda però di rispondere in modo matematicamente preciso. Commenti sono apprezzati, se pertinenti. Divagazioni fuori tema e risposte non pertinenti al tema, anche se corrette, non verranno valutate.

1. Spazi topologici (definizione, esempi, classi di sottoinsiemi importanti). Topologia relativa. Relazioni di equivalenza, spazio quoziente e topologia quoziente. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e S^1 .
2. Mappe continue ed omeomorfismi. Definizione. Comportamento di sottoinsiemi connessi e compatti (darne anche la definizione) sotto di esse.
3. Varietà differenziali. Definizioni (carte, atlanti, atlanti compatibili, strutture differenziali), almeno tre esempi tra quelli visti a lezione. Spiegare poi cosa cambia per le varietà con bordo.
4. Mappe differenziabili fra varietà: definizione ed esempi. La definizione è consistente con quella per mappe fra spazi vettoriali? Diffeomorfismi e diffeomorfismi locali; fare un esempio di un diffeomorfismo locale che non è un diffeomorfismo.
5. Vettori e spazi tangenti. Definizioni e costruzione della struttura vettoriale degli spazi tangenti e delle loro basi naturali.
6. Fibrato tangente: definizione (dando per note le proprietà degli spazi tangenti) e atlante "naturale" o "fibrato". Trivializzazioni e parallelizzabilità.
7. Mappa tangente di una mappa differenziabile (dando per noto il fibrato tangente): definizione, proprietà, espressione in coordinate naturali. Cosa cambia nel caso di varietà con bordo?
8. Dualità in spazi vettoriali, basi e mappe duali, isomorfismi "musicali". Fibrato cotangente. Mappa cotangente. Esempio: varietà riemanniane, tensore metrico, gradiente di una funzione.
9. Sottovarietà e sottovarietà immerse. Definizione, esempi, aspetti topologici della differenza fra di esse.
10. Campi vettoriali differenziabili: definizione, proprietà e loro legame con le derivazioni su $C^\infty(M)$. Flusso di un campo vettoriale completo (definizione). Derivata di Lie di funzioni e sua relazione con il flusso.
11. Push-forward e pull-back di campi vettoriali e loro relazione con i flussi. Parentesi di Lie e derivata di Lie di campi vettoriali.
12. Costruzione dei fibrati tensoriali e dei campi tensoriali. Esempi e leggi di trasformazione delle componenti rispetto a due carte locali.
13. Prodotto esterno e definizione di k-forme differenziali. Pull-back di forme differenziali e rappresentazione in carte locali.
14. Costruzione dell'integrale di n-forme su varietà di dimensione n.
15. Differenziale esterno di funzioni e k-forme. Proprietà del differenziale esterno. Formula di Stokes con dimostrazione.

16. Dualita` di Hodge nel caso di aperti in $\mathbb{R}^3$ e riscrittura delle equazioni di Maxwell.

17. Algebre di Lie: definizione ed esempi. Il caso dei campi vettoriali. Isomorfismi di algebre di Lie, sottoalgebre di Lie. Uno o due esempi di sottoalgebre di Lie dell'algebra di Lie dei campi vettoriali su una varieta`. Un esempio di algebre di Lie isomorfe.

18. Gruppi di Lie. Definizione ed esempi; gruppi di Lie matriciali.

19. Campi vettoriali invarianti a sinistra su un gruppo di Lie: definizione, esempi e qualche proprieta`.

20. Costruzione dell'algebra di Lie e della mappa esponenziale di un gruppo di Lie e definizione e caratterizzazione dei sottogruppi ad un parametro. (Si diano per note le proprieta` dei campi vettoriali invarianti a sinistra che si usano, ma le si citino).

21. Azioni di gruppi di Lie: definizione ed esempi. Spazio quoziente sotto un'azione, con esempi (anche delle ostruzioni al fatto che sia una varieta`). Definizione di campi vettoriali invarianti sotto un'azione e cenni alla riduzione delle equazioni differenziali ordinarie.

22. Distribuzioni: definizioni base (distribuzione regolare, varieta` integrale, distribuzione integrabile). Esempi elementari. Distribuzioni involutive e teorema di Frobenius (solo enunciato).

23. Fibrati: Definizione, qualche esempio, funzioni di transizione fra le trivializzazioni locali. Isomorfismi di fibrati con la stessa base; fibrati banali e non. Fibrati vettoriali: definizione e qualche esempio. Fibrati principali (solo definizione).

24. Connessioni: non e` parte del programma d'esame.