Ottimizzazione Stocastica

1. Introduzione

AVVISI

Si avvisano gli studenti che è fatto divieto di utilizzare il materiale caricato nel presente corso con alcuna finalità diversa dalla preparazione dell'esame. Ogni uso del suddetto materiale che costituisca violazione del presente divieto (per esempio, la comunicazione, diffusione, condivisione, anche parziale, su social networks o siti web, a titolo sia gratuito che oneroso), sarà perseguita a norma di legge.

Si segnala che la lezione verrà videoregistrata. Pertanto, l'eventuale e volontaria partecipazione degli studenti permetterà la raccolta di dati personali (quali, ad esempio, la voce e il contenuto dell'eventuale intervento). La registrazione della lezione rimarrà disponibile sul sito dell'Ateneo per permettere agli studenti che non hanno potuto partecipare di assistere alla stessa. Ulteriori informazioni, anche in relazione ai diritti riconosciuti dalla normativa privacy, sono disponibili alla pagina: https://www.unipd.it/privacy

Docente titolare

- Luigi De Giovanni*
  - Dipartimento di Matematica «T. Levi-Civita» (Torre Archimede) – uff. 4CD3
  - Tel. 049 827 1349
  - email: luigi@math.unipd.it ←
  - www.math.unipd.it/~luigi

  - Ricevimento (ufficio / Zoom / Skype):
    giovedì, h 10.30 – 12.30
    (su appuntamento via e-mail)

Ottimizzazione Stocastica

- Processo decisionale supportato da metodi quantitativi
- Valutazione e scelta dell'alternativa "migliore"
- Condizioni di incertezza: i dati e i parametri del sistema sono noti con un certo livello di incertezza
- Un ramo della **Ricerca Operativa**

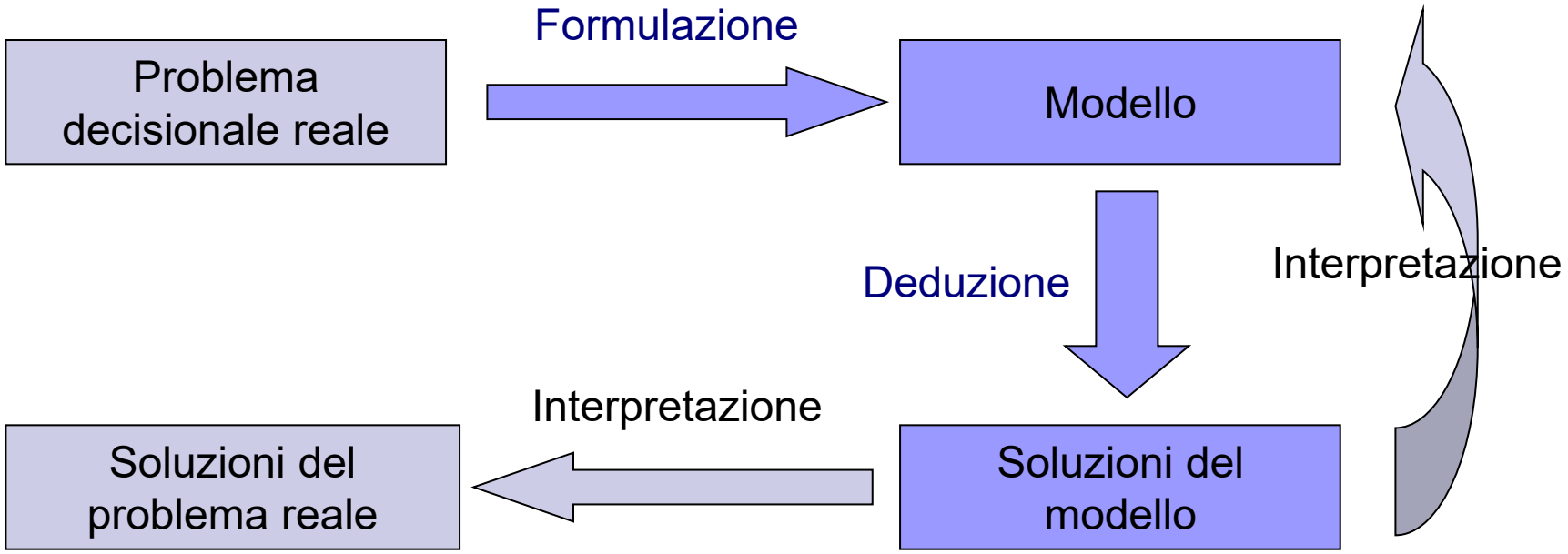
Problemi di ottimizzazione

- Determinare la migliore configurazione di sistemi complessi sotto condizioni di utilizzo di risorse scarse
  - Determinazione di percorsi ottimali
  - Mix ottimo di produzione
  - Organizzazione e pianificazione di processi produttivi o informativi
  - Gestione investimenti finanziari
  - Organizzazione dei flussi (dati, persone, produzione, traffico etc.)
  - Individuazione di sequenze genomiche
  - Pianificazione e gestione operativa di reti di trasporto
  - Configurazione di reti di produzione e distribuzione elettrica
  - **etc. etc. etc.**

Fonti di incertezza

- Conoscere con precisione il funzionamento dei sistemi reali può essere impossibile, difficile o non conveniente:
  - Fenomeni naturali (meteorologici, fisici etc.)
  - Comportamenti umani (scelte, congestione etc.)
  - Usura (guasti)
  - Andamento dei mercati (previsioni)
  - **etc. etc. etc.**
- Rappresentazione dell'incertezza:
  - **implicita**: elementi incerti trascurabili (es. usiamo stime)
  - **esplicita**: inclusa nei modelli e nei metodi decisionali

Metodologia generale multidisciplinare



- **Formulazione** con modelli: matematici, su grafo, simulazione, teoria dei giochi, machine learning etc.
- Deduzione: metodi quantitativi, algoritmi efficienti

Un problema di produzione (Tivar)

Sono disponibili 500 macchine per la produzione di bulloni, chiodi e dadi con richiesta settimanale di risp. 240, 100 e 200 kg. Ogni macchina può produrre, in alternativa, bulloni, chiodi o dadi, al costo di funzionamento settimanale di risp. 230, 260 e 150 €. Sulla base dell'esperienza, *la* ***produttività*** *settimanale di ogni macchina è* ***stimata*** in 3 kg di bulloni o 20 kg di chiodi o 2,5 kg di dadi. Si può anche acquistare all'esterno al massimo una tonnellata complessiva di bulloni, chiodi e dadi a un costo di risp.160, 40 e 200 €/kg. Un eventuale eccesso di bulloni, chiodi e dadi rispetto alla richiesta può essere venduto a un prezzo per kg di risp. 140, 30 e 170 €, e il mercato riesce ad assorbire una tonnellata di merce in tutto. Determinare il piano di produzione e outsourcing settimanale che massimizzi il profitto.

Approccio con incertezza trascurabile

Stime come fossero dati certi (*«Deterministic counterpart»*)

Calcolare la migliore alternativa con, **e.g.**, *modelli matematici:*

- Cosa bisogna decidere, quali quantità possiamo scegliere?
  $\Rightarrow$ variabili decisionali (incognite)
- Quale è l'obiettivo, quantità da minimizzare/massimizzare?
  $\Rightarrow$ funzione obiettivo
- Come sono caratterizzate le soluzioni ammissibili?
  $\Rightarrow$ vincoli del problema (relazioni tra incognite)

Modelli di programmazione matematica: funzione obiettivo e vincoli sono espressi come relazioni matematiche tra le variabili decisionali

Modello matematico

- Variabili decisionali:
  - x_i: num. di macchine che producono $i \in I = \{b, c, d\}$ (costo sett. C_i)
  - y_i: kg di $i \in I$ acquistati (al prezzo unitario A_i);
  - z_i: kg di $i \in I$ venduti (al prezzo unitario P_i);
- Modello di Programmazione Lineare Intera Mista:

$$\max \sum_{i \in I} P_i \, z_i - \sum_{i \in I} A_i \, y_i - \sum_{i \in I} C_i \, x_i$$

$$\begin{aligned}
s.t. \quad & x_b + x_c + x_d \leq 500 \\
& 3\, x_b + y_b \geq 240 + z_b \\
& 20\, x_c + y_c \geq 100 + z_c \\
& 2{,}5\, x_d + y_d \geq 200 + z_d \\
& y_b + y_c + y_d \leq 1000 \\
& z_b + z_c + z_d \leq 1000 \\
& y_i, z_i \in \mathbb{R}_+ \qquad x_i \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}$$

Uso del modello matematico

- Il modello matematico ha **valenza descrittiva**: dichiara le caratteristiche di una soluzione ottima del problema. Una soluzione ottima è una combinazione di valori che assegnati alle variabili decisionali, permettono di rispettare tutti i vincoli (compresi quelli di dominio) e di ottimizzare il valore della funzione obiettivo.

- Il modello matematico ha **valenza operativa**: esistono **metodi numerici** (ad es. simplesso, branch-and-bound, branch-and-cut etc.) disponibili in **software di ottimizzazione** in grado di accettare la descrizione del modello (vedi ad esempio il file `tivar-modello-deterministico.mod`) e calcolare una soluzione ottima.

Rappresentazione esplicita dell'incertezza (i)

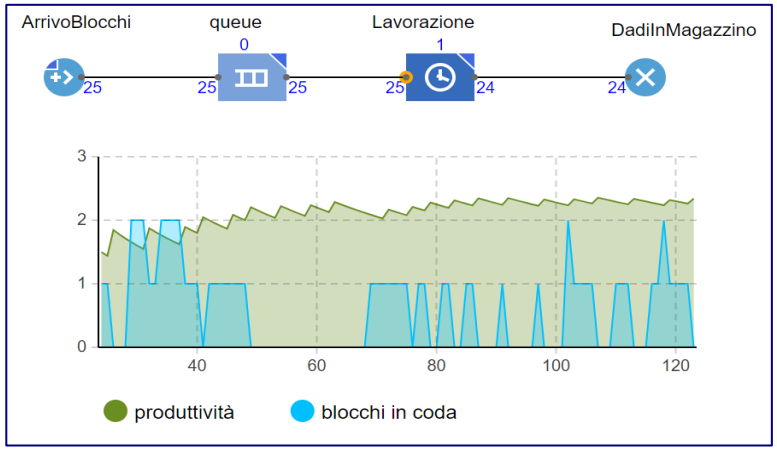
- Determinare le *fonti* di incertezza non trascurabile
  - ad esempio, la produttività è soggetta all'incertezza del processo
  - possibile esistenza di ulteriori fonti non rappresentate nel modello (e.g. domanda, prezzi)

- *Valorizzare* i parametri incerti
  - stima accurata per via analitica o simulativa
  - rappresentazione dell'incertezza (e.g., valore atteso, distribuzione, scenari etc.)

Esempio: valorizzazione della produttività

La produzione avviene per lotti, ciascuno ottenuto da un blocco di metallo il cui tempo di arrivo è soggetto all'incertezza dei tempi di consegna e di verifica preliminare di qualità, e il cui tempo di lavorazione è soggetto all'incertezza delle caratteristiche fisiche del blocco stesso.

1. **Modello** del sistema di produzione per valutare la produttività: ad es. *modello di reti di code*
2. Dall'analisi dei **dati** storici si ricavano le distribuzioni dei tempi di interarrivo e di lavorazione
3. **Calcolare** la produttività (valori, distribuzione, scenari …)
   - per via *analitica* se possibile
   - per via *simulativa*, vedi file
     - `tivar-simulazione-manuale.xlsx` (simulazione «manuale» su Excel)
     - `tivar-simulazione-processo-dadi.alp` (simulazione con reti di code in *AnyLogic*)



Rappresent. esplicita dell'incertezza (ii)

- Calcolare soluzioni alternative
  - Esperienza, alberi decisionali, sistemi «aziendali» (APS, lean etc.)
  - modello di programmazione matematica in diversi scenari

- Analizzare e *valutare soluzioni* alternative
  - **simulazione** delle soluzioni (ulteriori fonti di incertezza)
    [`Job Shop Example` in Anylogic]
  - **analisi** *what-if*
    per via simulativa



Rappresent. esplicita dell'incertezza (iii)

- *Stabilire **criteri di accettabilità e selezione** delle soluzioni e **definire/scegliere** l'alternativa **"migliore"***
  - Usare una *distribuzione della probabilità* per la produttività e *massimizzare* il **valore atteso** del profitto [`tivar-modello-incertezza`]
  - Trovare la soluzione migliore nel **caso peggiore** (max-min profitto)
  - Trovare la *migliore soluzione* che **garantisca ammissibilità** entro un *intervallo di incertezza* (valori min-max di produttività)
  - *etc. etc. etc.*

- Qual è la soluzione *giusta*? È *accettabile* in ogni condizione? Si potrebbero ottimizzare altre misure di incertezza o di rischio?
  - Analisi Decisionale
  - Ottimizzazione Robusta
  - Ottimizzazione Stocastica

Il corso di “Ottimizzazione Stocastica”

Obiettivi:
Fornire una panoramica degli **strumenti*** che aiutano a prendere le **migliori decisioni** anche quando le **informazioni** utili **non** sono completamente disponibili in modo **certo** ma solo in termini probabilistici.

* metodi di *valutazione*
metodi di *ottimizzazione*

Programma preliminare

Metodi di valutazione analitici e simulativi

- Teoria delle Code
- Simulazione a eventi discreti (reti di code)
- Simulazione di sistemi dinamici continui
- Uso di software specifico per la simulazione

Metodi di ottimizzazione

- Analisi decisionale in condizioni di incertezza o rischio
- Ottimizzazione robusta
- Ottimizzazione stocastica

Esempi notevoli

- Revenue Management
- Applicazioni reali

Organizzazione del corso [!]

- **Testi di riferimento**
  - Materiale fornito dai docenti e registrazioni (Moodle).
  - [*G. Ghiani e R. Musmanno (a cura di), "Metodi e modelli decisionali in condizioni di incertezza e rischio", McGraw-Hill, Milano, 2009.*]
- **Strumenti** (istruzioni per l'installazione personale su Moodle)
  - **Anylogic PLE**: simulazione tramite Visual Modeling Environment (no prerequisiti di programmazione)
  - Excel, AMPL: **opzionali**, solo per esempi in aula (non sono oggetto d'esame)
- **Lezioni: aule / lab Complesso Santa Caterina (Statistica) – lab BYOD (bring your own device)– videoregistrazioni**
- Materiali, registrazioni e avvisi su **Moodle (iscrizione)**

Modalità d'esame [!]

- **Scritto:**
  - **Parte 1:** esercizi e domande di teoria sui contenuti del corso, *esclusa simulazione* [circa 2 ore]. Fino a **15/30**, minimo 9
  - **Parte 2:** esercizi su simulazione a eventi discreti e system dynamics [circa 1 ora]. Fino a **15/30**, minimo 9
- Integrazione con orale (su esclusiva richiesta del docente)
- **Progetto Anylogic [entro settembre, esonera da Parte 2]**
  - Sviluppo e implementazione di un modello di simulazione in Anylogic
  - Lavoro di **gruppo** (2 persone). Fino a **15/30**, minimo 9
  - Analisi di un problema «realistico», guidato dal docente
  - **Presentazione** in data concordata (una per sessione, e.g., dopo lo scritto)
- **Modalità 1** [consigliata]**: entro settembre**
  Scritto parte 1 + Progetto Anylogic (anche in sessioni diverse)
- **Modalità 2: sempre possibile**
  Scritto (parte 1 + parte 2 nello stesso giorno**)**