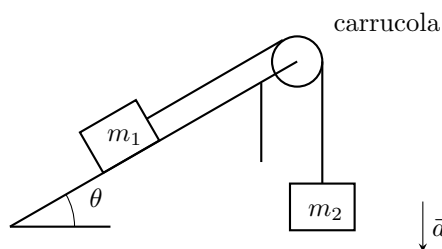


## Esercizio 1

Un blocco di massa  $m_1$  si trova su un piano inclinato scabro, di inclinazione  $\theta$  rispetto all'orizzontale. Il blocco è collegato mediante un filo inestensibile e di massa trascurabile a un secondo blocco di massa  $m_2$ , sospeso verticalmente. Il filo passa nella gola di una carrucola costituita da un disco pieno e omogeneo di massa  $M_p$  e raggio  $R$ , che può ruotare senza attrito attorno al proprio asse. Il filo non slitta sulla carrucola.

Il coefficiente di attrito dinamico tra  $m_1$  e il piano è  $\mu_d$ . Il sistema parte da fermo e il blocco  $m_2$  scende di una distanza verticale  $h$ .



Calcolare:

1. le equazioni cardinali della dinamica per i due blocchi e per la carrucola;
2. l'accelerazione del sistema;
3. le tensioni  $T_1$  e  $T_2$  nei due tratti del filo;
4. il tempo impiegato da  $m_2$  a percorrere la distanza  $h$  e la velocità raggiunta;
5. il lavoro svolto dalla forza di attrito durante il moto;
6. sapendo che il coefficiente di attrito statico è  $\mu_s$ , la massa minima  $m_{2,\min}$  necessaria affinché il sistema possa iniziare a muoversi con  $m_2$  verso il basso.

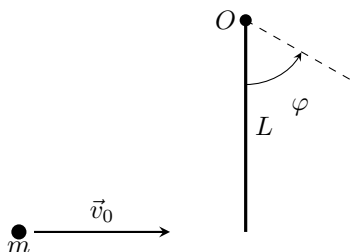
**Dati:**  $m_1 = 2.00 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 2.50 \text{ kg}$ ,  $M_p = 1.00 \text{ kg}$ ,  $R = 0.20 \text{ m}$ ,  $\theta = 30.0^\circ$ ,  $\mu_d = 0.150$ ,  $\mu_s = 0.250$ ,  $h = 1.50 \text{ m}$ .

Per un disco pieno e omogeneo:  $I_p = \frac{1}{2} M_p R^2$ .

## Esercizio 2

Un'asta rigida, sottile e omogenea, di massa  $M$  e lunghezza  $L$ , può ruotare senza attrito in un piano verticale attorno a un perno fisso posto a una sua estremità  $O$ . Inizialmente l'asta è ferma nella posizione verticale, con l'estremità libera rivolta verso il basso.

Un proiettile di massa  $m$ , che si muove orizzontalmente con velocità  $v_0$ , colpisce perpendicolarmente l'estremità libera dell'asta e vi rimane conficcato.



Calcolare:

1. il momento angolare del sistema rispetto al perno immediatamente prima e immediatamente dopo l'urto;
2. la velocità angolare del sistema immediatamente dopo l'urto;
3. l'energia cinetica prima e dopo l'urto;
4. la perdita percentuale di energia cinetica nell'urto;
5. l'angolo massimo  $\varphi_{\max}$ , misurato rispetto alla verticale verso il basso, raggiunto dall'asta dopo l'urto;
6. la velocità angolare del sistema quando, dopo essere risalito, torna per la prima volta nella posizione verticale iniziale.

**Dati:**  $M = 3.00 \text{ kg}$ ,  $m = 0.500 \text{ kg}$ ,  $L = 1.20 \text{ m}$ ,  $v_0 = 12.0 \text{ m s}^{-1}$ .  
Per un'asta sottile e omogenea rispetto a un asse passante per un'estremità:  $I_O = \frac{1}{3}ML^2$ .

## Scelta multipla

Per ciascuna domanda indicare una sola risposta.

1. Un disco ruota con velocità angolare costante. Se si raddoppia la distanza dall'asse di un punto solidale al disco, il modulo della sua accelerazione centripeta:
  - (a) raddoppia;
  - (b) quadruplica;
  - (c) si dimezza;
  - (d) rimane invariato.
2. Due pattinatori, inizialmente fermi su una superficie priva di attrito, si spingono reciprocamente e si separano. Durante la spinta:
  - (a) si conserva soltanto l'energia cinetica;
  - (b) si conserva la quantità di moto totale, ma non necessariamente l'energia cinetica;
  - (c) si conservano necessariamente quantità di moto ed energia cinetica;
  - (d) non si conserva nessuna delle due grandezze.
3. Una particella percorre una circonferenza con velocità costante in modulo. Allora:
  - (a) la sua accelerazione è nulla;
  - (b) la sua velocità vettoriale è costante;
  - (c) la sua accelerazione centripeta è costante in modulo ma cambia direzione;
  - (d) la sua accelerazione è tangente alla traiettoria.
4. Per un corpo rigido che rotola senza strisciare su un piano fermo vale:
  - (a)  $v_{CM} = \omega R$ ;
  - (b)  $v_{CM} = \omega / R$ ;
  - (c)  $v_{CM} = \omega R^2$ ;
  - (d)  $v_{CM} = R / \omega$ .
5. In una collisione completamente anelastica di un sistema isolato:
  - (a) si conservano energia cinetica e quantità di moto;
  - (b) si conserva la quantità di moto, ma non l'energia cinetica;
  - (c) si conserva l'energia cinetica, ma non la quantità di moto;
  - (d) non si conserva né l'una né l'altra.

6. Un pianeta percorre un'orbita ellittica attorno al Sole. Passando dall'afelio (il punto più lontano dal Sole) al perielio (il punto più vicino al Sole), la sua energia cinetica:
- (a) aumenta;
  - (b) diminuisce;
  - (c) rimane costante;
  - (d) diventa nulla.
7. Il modulo del momento di una forza applicata a distanza  $r$  da un asse è massimo quando la forza:
- (a) è parallela al vettore posizione;
  - (b) è perpendicolare al vettore posizione;
  - (c) passa per l'asse di rotazione;
  - (d) è nulla.
8. Una persona è ferma su una bilancia in un ascensore che sale con velocità costante. La bilancia misura:
- (a) un valore minore del peso;
  - (b) un valore maggiore del peso;
  - (c) il peso;
  - (d) zero.
9. Un sistema isolato ruota con momento angolare costante. Se il suo momento d'inerzia raddoppia, la velocità angolare:
- (a) raddoppia;
  - (b) si dimezza;
  - (c) rimane costante;
  - (d) quadruplica.
10. Un corpo viene lanciato verticalmente verso l'alto, trascurando la resistenza dell'aria. Nel punto più alto:
- (a) velocità e accelerazione sono nulle;
  - (b) l'accelerazione è nulla, ma la velocità non è nulla;
  - (c) la velocità è nulla, ma l'accelerazione ha modulo  $g$ ;
  - (d) velocità e accelerazione hanno entrambe modulo  $g$ .

## Soluzioni

### Esercizio 1

Assumiamo positivo il verso del moto: il blocco  $m_2$  scende e il blocco  $m_1$  sale lungo il piano. L'attrito dinamico su  $m_1$  è quindi diretto verso il basso lungo il piano e ha modulo  $f_d = \mu_d m_1 g \cos \theta$ .

#### Equazioni della dinamica

Per il blocco sul piano inclinato:

$$T_1 - m_1 g \sin \theta - f_d = m_1 a \quad (1)$$

Per il blocco sospeso:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a \quad (2)$$

Per la carrucola, scegliendo positivo il verso di rotazione prodotto da  $m_2$ :

$$(T_2 - T_1)R = I_p \alpha \quad (3)$$

Poiché il filo non slitta,

$$a = \alpha R \quad (4)$$

Con  $I_p = \frac{1}{2} M_p R^2$ , le equazioni 3 e 4 danno

$$T_2 - T_1 = \frac{I_p}{R^2} a = \frac{1}{2} M_p a \quad (5)$$

#### Accelerazione

Sommando le equazioni 1, 2 e 5, le tensioni si eliminano:

$$m_2 g - m_1 g \sin \theta - \mu_d m_1 g \cos \theta = \left( m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M_p \right) a \quad (6)$$

Pertanto

$$a = \frac{m_2 g - m_1 g (\sin \theta + \mu_d \cos \theta)}{m_1 + m_2 + M_p/2} \quad (7)$$

Numericamente:

$$a = \frac{(2.50)(9.81) - (2.00)(9.81)[\sin 30^\circ + 0.150 \cos 30^\circ]}{2.00 + 2.50 + 0.50}.$$

$$\boxed{a = 2.43 \text{ m s}^{-2}}$$

Il risultato positivo conferma il verso del moto assunto.

### Tensioni nei due tratti del filo

Dalla (1):

$$T_1 = m_1 a + m_1 g \sin \theta + \mu_d m_1 g \cos \theta \quad (8)$$

$$\text{quindi } T_1 = (2.00)(2.433) + (2.00)(9.81) \sin 30^\circ + 0.150(2.00)(9.81) \cos 30^\circ.$$

$$\boxed{T_1 = 17.2 \text{ N}}$$

Dalla (2):

$$T_2 = m_2(g - a) = (2.50)(9.81 - 2.433) \quad (9)$$

$$\boxed{T_2 = 18.4 \text{ N}}$$

Come previsto,  $T_2 > T_1$ , perché la differenza tra le tensioni produce l'accelerazione angolare della carrucola.

### Tempo di discesa e velocità finale

Il moto ha accelerazione costante e parte da fermo:

$$h = \frac{1}{2}at^2, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

Numericamente allora si ha  $t = \sqrt{\frac{2(1.50)}{2.433}} = 1.11 \text{ s}$ . La velocità finale può essere ricavata da  $v^2 = 2ah$ , perciò

$$\boxed{t = 1.11 \text{ s}, \quad v = 2.70 \text{ m s}^{-1}}$$

### Lavoro della forza di attrito

Il blocco  $m_1$  percorre lungo il piano la stessa distanza  $h$  percorsa verticalmente da  $m_2$ , poiché il filo è inestensibile. Il lavoro dell'attrito è

$$W_f = -f_d h = -\mu_d m_1 g \cos \theta h$$

Numericamente si ha  $W_f = -0.150(2.00)(9.81) \cos 30^\circ(1.50)$ .

$$\boxed{W_f = -3.82 \text{ J}}$$

Come verifica energetica, la variazione di energia potenziale gravitazionale disponibile è  $m_2 gh - m_1 gh \sin \theta$ , e deve uguagliare l'energia cinetica traslazionale dei blocchi, l'energia cinetica rotazionale della carrucola e l'energia dissipata dall'attrito.

### Massa minima per l'avvio del moto

Alla soglia del moto l'accelerazione è nulla e la carrucola non ha ancora accelerazione angolare; quindi le due tensioni sono uguali. Il blocco  $m_2$  può iniziare a scendere quando il suo peso supera la componente del peso di  $m_1$  lungo il piano più il massimo attrito statico:

$$m_2 g > m_1 g \sin \theta + \mu_s m_1 g \cos \theta$$

La massa limite è dunque  $m_{2,\min} = m_1 (\sin \theta + \mu_s \cos \theta)$ .

Numericamente si ottiene  $m_{2,\min} = 2.00 [\sin 30^\circ + 0.250 \cos 30^\circ]$ .

$$m_{2,\min} = 1.43 \text{ kg}$$

Poiché  $m_2 = 2.50 \text{ kg}$ , il sistema si mette effettivamente in moto nel verso assunto.

## Esercizio 2

Durante l'urto il momento angolare rispetto al perno  $O$  si conserva. La quantità di moto lineare del sistema, invece, non si conserva perché il perno esercita una forza impulsiva esterna. L'energia cinetica non si conserva perché il proiettile rimane conficcato nell'asta.

### Momento angolare durante l'urto

Immediatamente prima dell'urto, il vettore posizione del proiettile rispetto al perno è perpendicolare alla sua quantità di moto. Il modulo del momento angolare vale

$$L_i = mv_0 L$$

Numericamente:  $L_i = (0.500)(12.0)(1.20) = 7.20 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

Immediatamente dopo l'urto:

$$L_f = I_{\text{tot}} \omega_0$$

Per la conservazione del momento angolare:

$$L_i = L_f = 7.20 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

### Velocità angolare immediatamente dopo l'urto

Il momento d'inerzia complessivo rispetto a  $O$  è

$$I_{\text{tot}} = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2 = L^2 \left( \frac{M}{3} + m \right)$$

Con i dati assegnati:  $I_{\text{tot}} = (1.20)^2 \left( \frac{3.00}{3} + 0.500 \right) = 2.16 \text{ kg m}^2$

Pertanto  $\omega_0 = \frac{mv_0 L}{I_{\text{tot}}} = \frac{7.20}{2.16}$ .

$$\omega_0 = 3.33 \text{ rad s}^{-1}$$

### Energia cinetica prima e dopo l'urto

Prima dell'urto si muove soltanto il proiettile:  $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(0.500)(12.0)^2$ .

$$K_i = 36.0 \text{ J}$$

Dopo l'urto il sistema ruota attorno al perno:  $K_f = \frac{1}{2}I_{\text{tot}}\omega_0^2 = \frac{1}{2}(2.16)(3.333)^2$ .

$$K_f = 12.0 \text{ J}$$

### Perdita percentuale di energia cinetica

La perdita di energia è  $\Delta K = K_i - K_f = 36.0 - 12.0 = 24.0 \text{ J}$ .

La frazione dissipata è  $\eta = \frac{K_i - K_f}{K_i} = 1 - \frac{K_f}{K_i} = 1 - \frac{12.0}{36.0} = \frac{2}{3}$ .

$$\boxed{\eta = 66.7\%}$$

### Angolo massimo raggiunto

Dopo l'urto, durante la salita, l'energia meccanica si conserva. All'angolo massimo la velocità angolare è nulla. L'aumento di quota del centro di massa dell'asta è  $\Delta y_A = \frac{L}{2}(1 - \cos \varphi)$ , mentre l'aumento di quota del proiettile è  $\Delta y_P = L(1 - \cos \varphi)$ .

Quindi

$$K_f = Mg \frac{L}{2}(1 - \cos \varphi_{\max}) + mgL(1 - \cos \varphi_{\max})$$

Raccogliendo:

$$K_f = gL \left( \frac{M}{2} + m \right) (1 - \cos \varphi_{\max})$$

Da cui

$$\cos \varphi_{\max} = 1 - \frac{K_f}{gL(M/2 + m)}$$

Numericamente:  $\cos \varphi_{\max} = 1 - \frac{12.0}{(9.81)(1.20)(1.50+0.500)} = 0.490$ .

$$\boxed{\varphi_{\max} = 60.6^\circ}$$

### Velocità angolare al ritorno nella posizione iniziale

Tra l'istante immediatamente successivo all'urto e il ritorno nella posizione verticale iniziale non agiscono forze dissipative. Nella stessa configurazione geometrica l'energia potenziale è la stessa; pertanto anche l'energia cinetica è la stessa:

$$\frac{1}{2} I_{\text{tot}} \omega^2 = \frac{1}{2} I_{\text{tot}} \omega_0^2$$

Il modulo della velocità angolare è quindi uguale a quello iniziale, ma il verso è opposto:

$$\boxed{|\omega| = 3.33 \text{ rad s}^{-1}}$$

## Soluzioni delle domande a scelta multipla

1. **(a).** L'accelerazione centripeta vale  $a_c = \omega^2 r$ . A  $\omega$  costante, raddoppiando  $r$ , raddoppia  $a_c$ .
2. **(b).** In assenza di forze esterne orizzontali si conserva la quantità di moto totale. L'energia cinetica può aumentare grazie all'energia interna dei pattinatori, quindi non è necessariamente conservata.
3. **(c).** Il modulo dell'accelerazione è  $v^2/r$ , costante, ma la direzione è sempre rivolta verso il centro e quindi cambia durante il moto.
4. **(a).** Nel rotolamento puro il punto di contatto è istantaneamente fermo e vale la relazione cinematica  $v_{CM} = \omega R$ .
5. **(b).** In un urto completamente anelastico si conserva la quantità di moto del sistema isolato, mentre una parte dell'energia cinetica viene trasformata in energia interna.
6. **(a).** Avvicinandosi al Sole il pianeta perde energia potenziale gravitazionale e aumenta la propria energia cinetica; al perielio la velocità è massima.
7. **(b).** Il momento vale  $\tau = rF \sin \alpha$  ed è massimo per  $\alpha = 90^\circ$ .
8. **(c).** La velocità è costante, quindi l'accelerazione è nulla. La reazione normale della bilancia uguaglia il peso.
9. **(b).** Dalla conservazione di  $L = I\omega$ , se  $I$  raddoppia,  $\omega$  si dimezza.
10. **(c).** Al punto più alto la velocità istantanea è nulla, ma l'accelerazione gravitazionale resta diretta verso il basso e ha modulo  $g$ .