SERIE STORICHE

Padova, 31 agosto 2026

Nome Cognome N. matricola

Domanda 1

Si consideri il processo

$$Y_t = 1.5Y_{t-1} - 0.5Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

con $\varepsilon_t \sim WN(0, 2)$.
1. Specificare di che tipo di processo si tratta.
2. Si consideri il processo $Z_t = (1 - B)Y_t$. Dopo avere specificato di che processo di tratta (classe e valori dei parametri), per esso, calcolare i valori della autocorrelazione globale e dell'autocorrelazione parziale al ritardo 5, ρ_5 e P_5.
3. Avendo osservato $y_{49} = 9.8$ e $z_{50} = 0.7$, calcolare le previsioni $\hat{y}_{51|50}$ e $\hat{y}_{52|50}$.

Soluzione:
1. Il processo dato si può scrivere come

$$(1 - 1.5B + 0.5B^2)Y_t = \varepsilon_t$$

E' facile vedere che le radici dell'equazione caratteristica $(0.5B^2 - 1.5B + 1) = 0$ sono $B_1 = 1$ e $B_2 = 2$.
Fattorizzando opportunamente il polinomio AR con l'inverso delle radici, il processo si può scrivere:

$$(1 - 0.5B)(1 - B)Y_t = \varepsilon_t,$$

che è un processo $ARIMA(1, 1, 0)$, ovviamente non stazionario.

2. Se Y_t è un $ARIMA(1, 1, 0)$ allora $Z_t = (1 - B)Y_t$ è un $AR(1)$ a media nulla e di parametri $\phi = 0.5$ e $\sigma^2_\varepsilon = 2$.
Dato che la funzione di autocorrelazione di un AR(1) è data da $\rho_k = \phi^k$ si avrà $\rho_5 = 0.5^5 = 0.03125$.
Per un AR(p) la funzione di autocorrelazione parziale è nulla dal ritardo $p+1$ in poi, quindi $P_5 = 0$.

3. $z_t = y_t - y_{t-1}$ quindi $y_t = y_{t-1} + z_t$, da cui $y_{50} = y_{49} + z_{50} = 9.8 + 0.7 = 10.5$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{51|50} &= E_{50}[Y_{51}] \\ &= 1.5E_{50}[Y_{50}] - 0.5E_{50}[Y_{49}] + E_{50}[\varepsilon_{51}] \\ &= 1.5 \cdot 10.5 - 0.5 \cdot 9.8 + 0 = 10.85 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{52|50} &= E_{50}[Y_{52}] \\ &= 1.5E_{50}[Y_{51}] - 0.5E_{50}[Y_{50}] + E_{50}[\varepsilon_{52}] \\ &= 1.5 \cdot 10.85 - 0.5 \cdot 10.5 + 0 = 11.025 \end{aligned}$$

Domanda 2

Si consideri la media mobile M, ottenuta come *composizione* delle medie mobili M_1 ed M_2 così definite:

$$M_1 y_t = y_t^* = \frac{y_{t-1} + 2y_t + y_{t+1}}{4}$$

$$M_2 y_t = y_t^* = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{4}$$

1. Specificare come è fatta la media mobile M e quali sono le sue caratteristiche.
2. Dire, giustificando la risposta, se la media mobile M può essere utilizzata per stimare il trend di una serie che contiene un trend lineare e una componente periodica di periodo 5.
3. Dire, giustificando la risposta, se la media mobile M è in grado di eliminare la componente periodica di una serie trimestrale.

Soluzione

1. La composizione di M2 ed M1 è data da:

$$\begin{aligned} M_2(M_1 y_t) = y_t^{**} &= \frac{y_{t-1}^* + y_t^* + y_{t+1}^*}{4} = \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{y_{t-2} + 2y_{t-1} + y_t}{4} + \frac{y_{t-1} + 2y_t + y_{t+1}}{4} + \frac{y_t + 2y_{t+1} + y_{t+2}}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{16}y_{t-2} + \frac{3}{16}y_{t-1} + \frac{4}{16}y_t + \frac{3}{16}y_{t+1} + \frac{1}{16}y_{t+2} \qquad t = 3, \ldots, n-2 \end{aligned}$$

La media mobile M è quindi una m.m. simmetrica ma non semplice.

2. No. Perché la media mobile M sia idonea a stimare il trend nel contesto descritto bisogna che:

$$\sum_{i=-2}^{2} \theta_i = 1$$

$$\sum_{i=-2}^{2} i \cdot \theta_i = 0$$

Sebbene la seconda condizione sia soddisfatta, la prima non lo è, essendo $\sum_{i=-2}^{2} \theta_i = 3/4$, quindi la m.m non è idonea a stimare il trend.

3. No perché, pur essendo una media mobile simmetrica, non è ottenuta come centratura di due medie mobili asimmetriche di ordine 4.

Domanda 3

Dato il processo $Y_t = 1.5 + 0.5t^2 + 0.4\epsilon_{t-1} + \epsilon_t$ con $\epsilon_t \sim WN(0, 3.5)$, si consideri $X_t = (1-B)^2 Y_t$.

1. Si stabilisca a che classe di processi appartiene X_t.
2. Se ne calcolino media e varianza e si dica, giustificando la risposta, se X_t è un processo stazionario.
3. Avendo calcolato $\hat{\varepsilon}_{50} = 3.2$, $\hat{\varepsilon}_{49} = -0.5$ e $\hat{\varepsilon}_{48} = 1.6$ si determini la previsione $\hat{X}_{58|50}$ e la relativa varianza dell'errore di previsione.

Soluzione:

1. Risulta:

$$\begin{aligned} X_t &= (1-B)^2 Y_t = (1 - 2B + B^2) Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} = \\ &= 1.5 + 0.5t^2 + 0.4\epsilon_{t-1} + \epsilon_t - 2(1.5 + 0.5(t-1)^2 + 0.4\epsilon_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \\ &\quad +1.5 + 0.5(t-2)^2 + 0.4\epsilon_{t-3} + \epsilon_{t-2} = \\ &= 1 + 0.4\epsilon_{t-3} + 0.2\epsilon_{t-2} - 1.6\epsilon_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned}$$

   Quindi, X_t è un $MA(3)$

2. Essendo un MA X_t è certamente stazionario. Inoltre:

$$E[X_t] = 1$$

   e

$$Var[X_t] = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \sum_{i=1}^{3} \theta_i^2) = 3.5(1 + 0.4^2 + 0.2^2 + (-1.6)^2) = 13.16$$

3. Per un MA(3) la previsione a k passi con $k > 3$ si riduce alla media marginale del processo e la varianza dell'errore di previsione alla varianza marginale del processo per cui si ha:

$$\hat{x}_{58|50} = 1$$

$$Var(e_{58|50}) = Var(X_t) = 13.16$$

Domanda 4

Si consideri il modello per serie storiche trimestrali

$$Y_t = 2 + 0.5t + 1.5d_{2,t} - d_{3,t} + d_{4,t} + \varepsilon_t,$$

dove $d_{i,t}$ è una variabile dummy che identifica il trimestre i-esimo e ε_t è un $WN(0, \sigma^2)$.
1. Si riscriva il modello senza la costante.
2. Si forniscano i valori dei coefficienti ideali.

Soluzione:

1. $Y_t = 0.5t + 2 \cdot d_{1,t} + 3.5 \cdot d_{2,t} + d_{3,t} + 3 \cdot d_{4,t} + \varepsilon_t$

2. $CG = (2, 3.5, 1, 3)$
   $\bar{CG} = 9.5/4 = 2.375$
   $CI = CG - \bar{CG} = (-0.375, 1.125, -1.375, 0.625)$

Domanda 5

Si definisca cosa si intende per serie storica nell'ambito i) dell'approccio classico e ii) dell'approccio moderno all'analisi delle serie storiche.

Soluzione:

- Una serie storica è una sequenza di osservazioni su una stessa variabile fatte sequenzialmente nel tempo. Tali osservazioni - di norma - non sono indipendenti e sono indicizzate dal tempo.
- Nell'ambito dell'approccio classico, la serie storica è pensata come la risultante di componenti deterministiche che ne determinano l'andamento di fondo (trend), eventuali comportamenti periodici (stagionalità) e una parte più irregolare e impredicibile.
- Nell'ambito dell'approccio moderno, la serie storica rappresenta una realizzazione finita di un processo stocastico. In questo caso, di norma, le componenti vengono modellate congiuntamente.

Domanda 6

Dopo avere specificato cosa si intende per componente tendenziale di una serie storica, si discuta brevemente come questa può essere modellata.

Soluzione:
La componente tendenziale, o trend, descrive l'andamento di fondo di un fenomeno, al netto delle variazioni stagionali e di breve periodo.

Il trend può essere modellato pensandolo:

1. come una componente deterministica del tempo

   1a) esplicitandone una forma parametrica, per esempio un trend polinomiale o una curva di crescita, e stimandone i relativi parametri, oppure

   1b) in maniera non parametrica utilizzando medie mobili in grado di eliminare la componente stagionale e di ridurre la componente erratica portando in evidenza, per differenza o per quoziente, il trend. In questo caso il trend non ha una forma funzionale ben definita.

   In entrambi i casi, comunque, ne consegue una rappresentazione grafica esplicita del trend.

2. come un oggetto stocastico, cioè come la risultante (la somma) di una serie di shock aleatori (trend stocastico). In questo caso il trend non viene stimato in maniera esplicita ma congiuntamente alle altre componenti della serie. La conseguenza è che non ne viene prodotta una rappresentazione grafica.

Il trend può essere modellato:
- per un interesse specifico nel comportamento di lungo termine del fenomeno oggetto di studio;
- per detrendizzare la serie e rendere più evidenti le altre componenti o per rendere la serie stazionaria.