SERIE STORICHE

Padova, 15 luglio 2026

Nome Cognome N. matricola

Domanda 1

Individuare un processo della classe ARIMA stazionario e invertibile che abbia la seguente funzione di autocovarianza:

$$\gamma_0 = 12, \;\; \gamma_1 = 0, \;\; \gamma_2 = 4, \;\; \gamma_k = 0 \;\; \forall k > 2$$

Soluzione: La funzione di autocovarianza data è coerente con quella di un processo $MA(2)$ con il primo coefficiente a media mobile pari a zero:

$$X_t = \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-2}$$

dove $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$. Per tale processo avremo:

$$\gamma_0 = Var(X_t) = \sigma_\epsilon^2(1+\theta^2) = 12$$

$$\gamma_1 = Cov(X_t, X_{t-1}) = 0$$

$$\gamma_2 = Cov(X_t, X_{t-2}) = E[(\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-2})(\epsilon_{t-2} - \theta\epsilon_{t-4})] = -\theta\sigma_\epsilon^2 = 4$$

$$\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k}) = 0, \;\; \forall k \geq 2$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} \sigma_\epsilon^2(1+\theta^2) = 12 \\ -\theta\sigma_\epsilon^2 = 4. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si arriva alle due coppie di parametri: ($\theta \approx -0.38, \;\; \sigma_\epsilon^2 \approx 10.47$) e ($\theta \approx -2.62, \;\; \sigma_\epsilon^2 \approx 1.53$.) Osserviamo che abbiamo quindi due processi compatibili con la funzione di autocovarianza data:

1. $X_t = \epsilon_t - 2.62\epsilon_{t-2}$ dove $\epsilon_t \sim WN(0, 1.53)$
2. $X_t = \epsilon_t - 0.38\epsilon_{t-2}$ dove $\epsilon_t \sim WN(0, 10.47)$

Osserviamo che il primo processo è non invertibile, in quanto

$$1 - 2.62B^2 = 0$$

porta a due radici in modulo minori di uno.
Il processo è dunque un MA(2) con $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = -0.38$ e $\sigma_\varepsilon^2 = 10.47$.

Domanda 2

Si consideri la media mobile

$$y_t^* = \frac{1}{4}y_{t-2} + \frac{1}{4}y_{t-1} + \frac{1}{4}y_t + \frac{1}{4}y_{t+1}$$

e si ipotizzi di applicarla ad una serie generata dalla somma di una componente stagionale costante e da un trend lineare.

1. Dire se questa media mobile è in grado di eliminare la componente periodica.
2. Dire se questa media mobile è adatta a stimare il trend.
3. Se questa media mobile venisse applicata ad un white noise, la serie perequata risulterebbe più o meno variabile di quella originale? Quantificare il miglioramento o il peggioramento.

Soluzione: Esercizio n. 3.9 dell'Eserciziario.

1. Una media mobile semplice di ordine 4 elimina una componente stagionale di periodo 4. Tale risultato è garantito anche da una media mobile di tipo asimmetrico, come quella incontrata in questo esercizio.
2. Definiamo il trend lineare $T_t = a + bt$ e applichiamo la media mobile in questione. Avremo

$$\begin{aligned} T_t^* &= \frac{1}{4}T_{t-2} + \frac{1}{4}T_{t-1} + \frac{1}{4}T_t + \frac{1}{4}T_{t+1} \\ T_t^* &= \frac{1}{4}(a + b(t-2)) + \frac{1}{4}(a + b(t-1)) \\ &\quad + \frac{1}{4}(a + bt) + \frac{1}{4}(a + b(t+1)) \\ T_t^* &= a + bt - \frac{1}{2}b \end{aligned}$$

   La stima del trend T_t^* differisce da quello originale T_t per la differente intercetta $(a - \frac{1}{2}b)$. Pur mantenendo lo stesso coefficiente angolare, non si può affermare che tale media mobile risulti adatta per la stima di un trend lineare. Più consona risulterebbe l'applicazione di una media mobile semplice centrata e simmetrica.
3. Il rapporto di riduzione della varianza è pari a $4 \cdot 0,25^2 = 0,25$, per cui la serie perequata risulterebbe meno variabile di quella originaria (la variabilità del suo termine di disturbo ε_t^* si riduce ad un quarto di quella del disturbo ε_t).

Domanda 3

Dato un modello SARIMA(1,0,0)$\times$(0,1,1)$_4$, calcolare la previsione con orizzonte temporale $k = 5$ sapendo che:

- il parametro AR ϕ_1 è pari a -0,8;
- l'ultimo valore osservato della serie storica è $y_n = 3$;
- $\hat{y}_{n+1|n} = -2$ e $\hat{y}_{n+4|n} = 1$.

Soluzione:

Il processo indicato si esprime nella forma:

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B^4)Y_t = (1 - \Theta_1 B^4)\varepsilon_t.$$

Poiché

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B^4) = 1 - \phi_1 B - B^4 + \phi_1 B^5,$$

il processo può essere riscritto nel modo seguente:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + Y_{t-4} - \phi_1 Y_{t-5} + \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-4}.$$

Il previsore di Y_{n+5} è dunque pari a:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{n+5|n} &= E_n[Y_{n+5}] \\ &= \phi_1 E_n[Y_{n+4}] + E_n[Y_{n+1}] - \phi_1 E_n[Y_n] + \\ &\quad + E_n[\varepsilon_{n+5}] - \Theta_1 E_n[\varepsilon_{n+1}]. \end{aligned}$$

Il calcolo dei valori attesi condizionati avviene secondo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} E_n[Y_{n+j}] &= \begin{cases} y_{n+j} & j \leq 0 \\ \hat{y}_{n+j|n} & j > 0 \end{cases} \\ E_n[\varepsilon_{n+j}] &= \begin{cases} e_{n+j} & j \leq 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Pertanto, la previsione $\hat{y}_{n+5|n}$ è pari a

$$\hat{y}_{n+5|n} = \phi_1 \hat{y}_{n+4|n} + \hat{y}_{n+1|n} - \phi_1 y_n.$$

Sostituendo i valori noti nella precedente espressione otteniamo il risultato richiesto:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{n+5|n} &= -0,8 - 2 - (-0,8) \cdot 3 \\ &= -0,8 - 2 + 2,4 = -0,4. \end{aligned}$$

Domanda 4

Si consideri il modello per serie storiche trimestrali

$$Y_t = 2.7 + 0.5t + 1.2d_{1,t} - 2.0d_{2,t} + 3.5d_{3,t} - 2.5d_{4,t} + X_t,$$

dove $d_{i,t}$ è una variabile dummy che identifica il trimestre i-esimo e X_t è un processo SARIMA$(1,0,1)(1,1,0)_4$. Si consideri il processo $W_t = (1 - B^4)Y_t$ e si determini che tipo di modello segue.

Soluzione:

$$\begin{aligned} W_t &= Y_t - Y_{t-4} \\ &= 2.7 + 0.5t + 1.2d_{1,t} - 2.0d_{2,t} + 3.5d_{3,t} - 2.5d_{4,t} + X_t - \\ &\quad (2.7 + 0.5(t-4) + 1.2d_{1,t-4} - 2.0d_{2,t-4} + 3.5d_{3,t-4} - 2.5d_{4,t-4} + X_{t-4}) \\ &= 2 + X_t - X_{t-4} \\ &= 2 + (1 - B^4)X_t \end{aligned}$$

dato che osservazioni che distano 4 trimestri si riferiscono sempre allo stesso trimestre.

Dato che X_t è un SARIMA$(1,0,1)(1,1,0)_4$, $(1 - B^4)X_t$ è un SARIMA$(1,0,1)(1,0,0)_4$.

Pertanto W_t è un SARIMA$(1,0,1)(1,0,0)_4$ con costante pari a 2.

Domanda 5

Si discutano brevemente i criteri per la scelta del grado del polinomio per descrivere un trend deterministico nell'ambito del cosiddetto approccio classico all'analisi delle serie storiche.

Soluzione:

- Criterio dell'R^2 corretto: spiegare in cosa consiste;
- criterio della significatività dei parametri: spiegare in cosa consiste;
- criterio delle differenze successive: spiegare in cosa consiste

Domanda 6

Descrivere brevemente i test di incorrelazione di Ljung-Box e di Pierce, specificandone l'ipotesi nulla, la statistica test, e la distribuzione asintotica.

Soluzione:
- Test di Ljung-Box
Ip. nulla: $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_K = 0$
Statistica test:

$$LB(K) = n(n+2) \sum_{i=1}^{K} \frac{\hat{\rho}_i^2}{n-i}$$

Distribuzione asintotica:

$$LB(K) \sim \chi^2_{K-p}$$

dove p rappresenta il numero di parametri stimati dal modello.

- Test di Pierce
Ip. nulla: $H_0 : \rho_S = \rho_{2S} = ... = \rho_{KS} = 0$
dove S è il periodo stagionale.
Statistica test:

$$Q(K) = n(n+2) \sum_{i=1}^{K} \frac{\hat{\rho}_{i \cdot S}^2}{n - i \cdot S}$$

Distribuzione asintotica:

$$Q(K) \sim \chi^2_{K-p}$$

dove p rappresenta il numero di parametri stimati dal modello.