SERIE STORICHE

Padova, 29 giugno 2026

Nome Cognome N. matricola

Domanda 1

Si considerino i due processi

$$X_t = 0.6X_{t-1} + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim WN(0,1)$$

$$Y_t = 0.3\eta_{t-1} + \eta_t, \qquad \eta_t \sim WN(0,4)$$

con errori indipendenti tra loro.
Si dimostri che i processi:

$$W_t = X_t + Y_t$$

$$Z_t = X_t - Y_t$$

sono (debolmente) stazionari.

Soluzione:

Per dimostrare che W_t e Z_t sono (debolmente) stazionari bisogna dimostrare che $E[W_t]$, $E[Z_t]$, $Var(W_t)$, e $Var(Z_t)$ sono costanti $\forall t$ e che $Cov(W_t, W_{t\pm k})$ e $Cov(Z_t, Z_{t\pm k})$ dipendono soltanto dal ritardo k e non da t.
Si noti che X_t è un AR(1) a media nulla e Y_t è un MA(1) e che entrambi sono stazionari e invertibili avendo parametri AR e MA in modulo minori di uno.
Essendo gli errori dei due processi indipendenti fra loro, la somma e la differenza di due processi stazionari mantengono le stesse proprietà, quindi possiamo dire che W_t e Z_t sono stazionari.

Sfruttando le note proprietà dei processi AR e MA, si può avere un'ulteriore conferma della stazionarietà calcolando i momenti:

- $E[X_t] = 0$
  $E[Y_t] = 0$,
- $Var(X_t) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2} = 1.5625$,
  $Var(Y_t) = \sigma_\eta^2(1+\theta^2) = 4.36$,
- $Cov(X_t, X_{t\pm k}) = \gamma_k^X = 0.6\gamma_{k-1}^X = 0.6^k\gamma_0^X = 0.6^k 1.5625$
- $Cov(Y_t, Y_{t\pm 1}) = \gamma_1^Y = 0.3 \cdot 4 = 1.2$, e
  $Cov(Y_t, Y_{t\pm k}) = 0$ per $k \neq 1$
- $Cov(X_t, Y_s) = 0 \quad \forall t, s.$

Per quanto riguarda il processo W_t si ha quindi:

$$E[W_t] = E[X_t + Y_t] = E[X_t] + E[Y_t] = 0 \quad \forall t$$

$$Var(W_t) = Var(X_t + Y_t) = Var(X_t) + Var(Y_t) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = \sigma_W^2 = 5.9225 \quad \forall t$$

$$\begin{aligned} Cov(W_t, W_{t\pm k}) &= Cov(X_t + Y_t, X_{t\pm k} + Y_{t\pm k}) \\ &= Cov(X_t, X_{t\pm k}) + Cov(X_t, Y_{t\pm k}) + Cov(Y_t, X_{t\pm k}) + Cov(Y_t, Y_{t\pm k}) \\ &= \gamma_k^X + \gamma_k^Y = \gamma_k^W \end{aligned}$$

che dipende solo dal ritardo k e non da t. Pertanto W_t è (debolmente) stazionario.

In modo analogo si dimostra che:

$$E[Z_t] = E[X_t - Y_t] = E[X_t] - E[Y_t] = 0 \quad \forall t$$

$$Var(Z_t) = Var(X_t - Y_t) = Var(X_t) + Var(Y_t) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = \sigma_W^2 = 5.9225 \quad \forall t$$

$$\begin{aligned} Cov(Z_t, Z_{t\pm k}) &= Cov(X_t - Y_t, X_{t\pm k} - Y_{t\pm k}) \\ &= Cov(X_t, X_{t\pm k}) - Cov(X_t, Y_{t\pm k}) - Cov(Y_t, X_{t\pm k}) + Cov(Y_t, Y_{t\pm k}) \\ &= \gamma_k^X + \gamma_k^Y = \gamma_k^Z \end{aligned}$$

che dipende solo dal ritardo k e non da t. Pertanto anche il processo Z_t è (debolmente) stazionario.

Domanda 2

Sulla base delle osservazioni trimestrali y_t $(t = 1, ..., 28)$ è stato stimato il seguente modello

$$Y_t = 2 + 0.15t + 0.08t^2 + 1.2d_{1,t} + 0.5d_{2,t} - 3.8d_{3,t} + \varepsilon_t$$

con $\varepsilon_t \sim GWN(0, 2)$.
1) Ottenere i coefficienti stagionali del modello.
2) Si consideri il modello $X_t = (1 - B^4)Y_t$. Ottenere la previsione puntuale di X_{34} e il relativo intervallo di previsione al livello 95%.

Soluzione:
1)
Coefficienti stagionali grezzi:
$\gamma_1^* = 1.2 + 2 = 3.2$
$\gamma_2^* = 0.5 + 2 = 2.5$
$\gamma_3^* = -3.8 + 2 = -1.8$
$\gamma_4^* = 2$

$\bar{\gamma} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \gamma_i^* = 1.475 \neq 0$

Coefficienti stagionali (ideali):
$\gamma_1 = 3.2 - 1.475 = 1.725$
$\gamma_2 = 2.5 - 1.475 = 1.025$
$\gamma_3 = -1.8 - 1.47 = -3.275$
$\gamma_4 = 2 - 1.475 = 0.525$

2)

$$\begin{aligned} X_t = (1 - B^4)Y_t &= Y_t - Y_{t-4} \\ &= 0.15t + 0.08t^2 + (dummy\ stagionali) + \varepsilon_t \\ &\quad -0.15(t-4) - 0.08(t-4)^2 - (dummy\ stagionali) - \varepsilon_{t-4} \\ &= 0.15 \cdot 4 - 0.08 \cdot 16 + 0.08 \cdot 8 \cdot t + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-4}) \end{aligned} \quad (1)$$

Previsione puntuale

$$\begin{aligned} \hat{X}_{34} = E(X_{34|28}) &= 0.15 \cdot 4 - 0.08 \cdot 16 + 0.08 \cdot 8 \cdot 34 + E(\varepsilon_{34} - \varepsilon_{30}) \\ &= 21.08 + 0 = 21.08 \end{aligned}$$

Errore di previsione

$$e_{34} = X_{34} - \hat{X}_{34} = \varepsilon_{34} - \varepsilon_{30}$$

Varianza errore di previsione

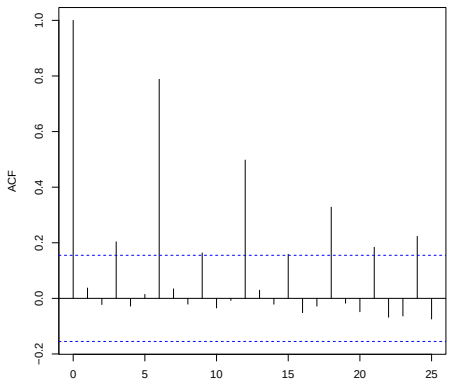
$$Var(e_{34}) = Var(\varepsilon_{34} - \varepsilon_{30}) = Var(\varepsilon_{34}) + Var(\varepsilon_{30}) = 2 + 2 = 4$$

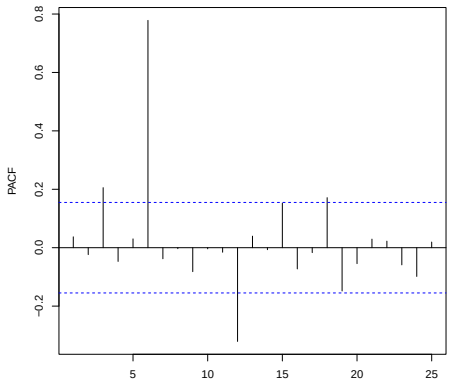
Intervallo di previsione al 95

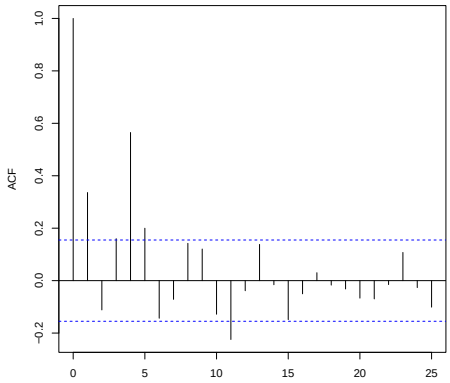
$$\hat{X}_{34} \pm 1.96\sqrt{4} = [17.16, 25]$$

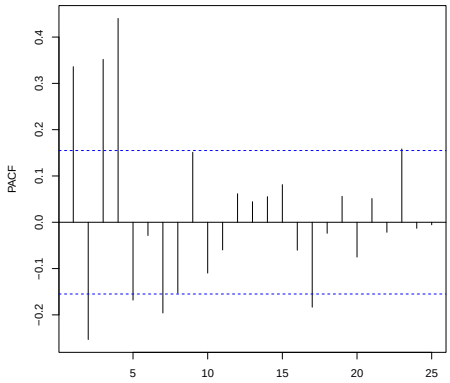
Domanda 3

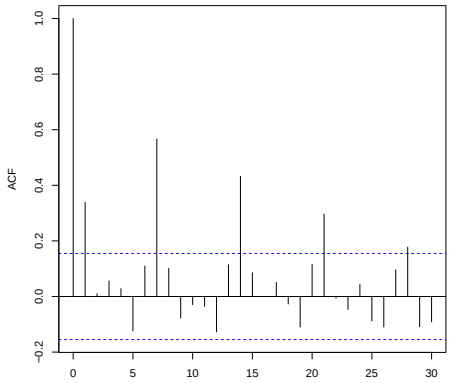
Identificare dei possibili processi generatori compatibili con le ACF e PACF riportate di seguito e calcolate per serie di lunghezza $n = 160$:

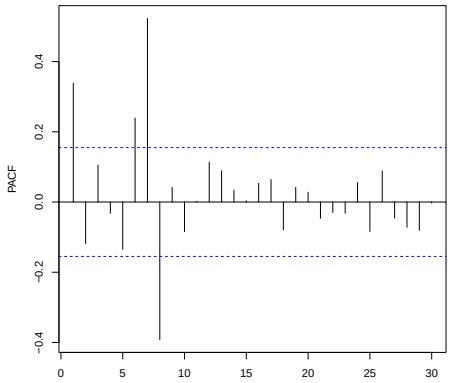


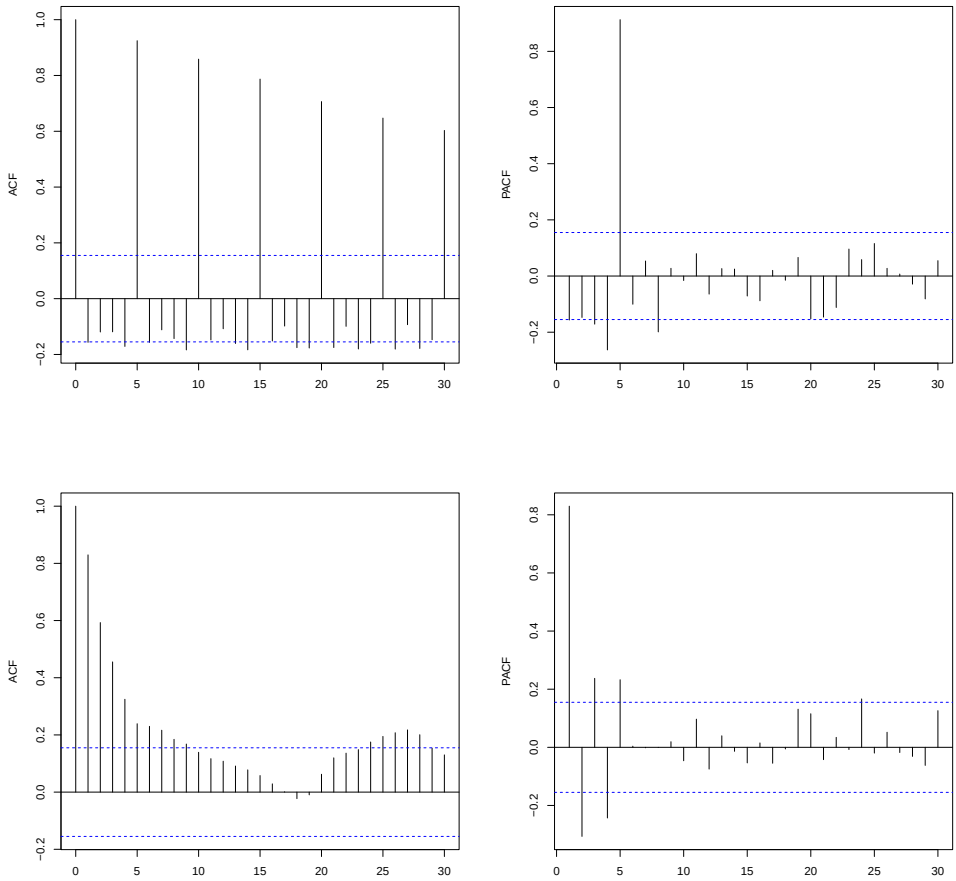












Soluzione:

1) $(0,0,0)(1,0,1)_6$
2) $(0,0,1)(1,0,0)_4$ o anche $(0,0,1)(0,0,1)_4$
3) $(1,0,0)(1,0,0)_7$ o anche $(0,0,1)(1,0,0)_7$
4) $(0,0,0)(0,1,0)_5$ o anche $(0,0,0)(1,0,0)_5$
5) $(1,0,1)$

Domanda 4

La serie storica trimestrale $y_t = (145, 144, 156, 145, 149, 148, 159, 148, 152, 153, 165, 152, 156, 155, 165, 157)$ si riferisce ad una variabile macroeconomica nel periodo 2022.1 - 2025.4.
L'applicazione di una media mobile ottenuta come centratura di una media mobile semplice a 4 termini ha portato ai valori riportati in tabella:

anno/trim	I	II	III	IV
2022	–	–	148	149
2023	149.875	150.625	151.375	152.375
2024	153.750	155	156	156.750
2025	157	157.625	–	–

Ipotizzando un modello moltiplicativo del tipo:

$$y_t = T_t \cdot S_t \cdot \varepsilon_t$$

dove T_t ed S_t rappresentano il trend e la stagionalità, fornire i valori destagionalizzati della serie per i trimestri 2025.III e 2025.IV.

Soluzione:

I valori riportati nella tabella, essendo ottenuti applicando una mm che è la centratura di una media mobile semplice di ordine 4, rappresentano la stima del trend ($\hat{T}_t$) contaminata dall'errore.

Dato che il modello è moltiplicativo, dividendo i dati osservati per i corrispondenti valori del trend (valori riportati in tabella) si ottengono i coefficienti specifici (CS) di stagionalità

$$CS_t = y_t / \hat{T}_t$$

Nel nostro caso, organizzandoli in tabella, si ha

anno/trim	I	II	III	IV
2022	–	–	1.054	0.973
2023	0.994	0.983	1.050	0.971
2024	0.989	0.987	1.058	0.970
2025	0.994	0.983	–	–

I coefficienti grezzi (CG) si ottengono facendo una media dei coefficienti specifici dello stesso trimestre (media per colonna dei valori in tabella). Così facendo si ha:

$$CG = (0.992, 0.984, 1.054, 0.971)$$

Dato che la **media geometrica (MG)** dei coefficienti grezzi è pari a $0.9997 \neq 1$ per la destagionalizzazione bisogna considerare i coefficienti ideali (CI), ottenuti dividendo i coefficienti grezzi la loro media geometrica:

$$CI = CG/MG = (0.992, 0.984, 1.054, 0.971).$$

In questo caso, dato che la media geometrica era molto prossima a 1, i CI risultano uguali ai CG quando vengono approssimati alla terza cifra decimale.
Dunque i valori destagionalizzati richiesti si ottengono mediante i quozienti:

$$y^d_{2025,3} = 165/1.054 = 156.546$$

e

$$y^d_{2025,4} = 157/0.971 = 161.689$$

Domanda 5

1. Si definisca la componente stagionale di una serie storica.
2. Si descrivano gli strumenti idonei alla sua identificazione e alla sua stima.

Soluzione:

1. una componente periodica S_t di periodo P deve essere tale che:
$S_t = S_{t+P}$ per ogni t;
$\sum_{i=1}^{P} S_{t+i} = 0$ per ogni t.
2. E' possibile identificare una componente periodica mediante i) analisi grafiche; ii) mediante box-plot sulle "stagioni" interne al periodo; iii) osservando se la (P)ACF presenta picchi in corrispondenza dei ritardi P, $2P$, $3P$....; iv) considerando la significatività dei coefficienti stagionali di opportuni modelli.
Nell'ambito dell'analisi classica, la componente stagionale può essere stimata mediante i coefficienti ideali in riferimento a modelli con variabili dummy o a medie mobili. In questo contesto, la componente stagionale viene stimata esplicitamente.
Nell'ambito dell'analisi moderna la componente stagionale viene considerata all'interno dei modelli SARIMA mediante l'introduzione di opportuni polinomi AR ed MA stagionali che a loro volta contengono i parametri stagionali. In questo caso, tuttavia, la stima non è esplicita.

Domanda 6

1) Sotto quali condizioni un modello AR(1) ammette una rappresentazione MA(∞)?
2) Ricavare la rappresentazione MA(∞) di un modello AR(1) a media nulla con parametro ϕ.

Soluzione:

1) Il processo AR(1) deve essere stazionario (quindi $|\phi| < 1$).
2)

$$\begin{aligned}(1-\phi B)Y_t &= \varepsilon_t \\ Y_t &= (1-\phi B)^{-1}\varepsilon_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(\phi B)^j \varepsilon_t \\ &= \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \phi^3\varepsilon_{t-3} + ...\end{aligned}$$

che corrisponde al processo MA(∞)

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty}\theta_j \varepsilon_{t-j}$$

con $\theta_j = \phi^j$.