SERIE STORICHE

Padova, 28 gennaio 2026

Nome Cognome N. matricola

Domanda 1

Dato il processo $Y_t = a + bt + ct^2 + \varepsilon_t$, con $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2_\varepsilon)$, si consideri $X_t = (1 - B)^2 Y_t$.

1. Si stabilisca a che classe di processi appartiene X_t.
2. Si dica se X_t è un processo stazionario e/o invertibile.

Soluzione:

1. Sviluppiamo l'espressione per X_t:

$$\begin{aligned} X_t = & \quad (1-B)^2 Y_t = (1 - 2B + B^2) Y_t \\ = & \quad Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} \\ = & \quad a + bt + ct^2 + \varepsilon_t - 2\left[a + b(t-1) + c(t-1)^2 + \varepsilon_{t-1}\right] + a + b(t-2) + c(t-2)^2 + \varepsilon_{t-2} \\ = & \quad 2c + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} \end{aligned}$$

   Quindi $X_t \sim MA(2)$ con media pari a $E[X_t] = \mu = 2c$.

2. Trattandosi di un processo MA, X_t è certamente stazionario. Per valutarne l'invertibilità troviamo le radici dell'equazione

$$1 - 2B + B^2 = (1 - B)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad B_{1,2} = 1.$$

   Il processo ha dunque due radici unitarie, e pertanto non è invertibile.

Domanda 2

Per la serie y_t, $t = 1, ..., 50$ è stato stimato un modello SARIMA(1,0,1)$\times$(1,0,1)$_4$, con parametri $\hat{\phi} = 0.5$, $\hat{\Phi} = 0.3$, $\hat{\theta} = -0.4$, $\hat{\Theta} = 0.2$ e $\hat{\sigma}^2 = 2.8$.
Sapendo che $y_{50} = 12$, $\hat{y}_{54|50} = 8$, $\hat{y}_{51|50} = 10$ e $\hat{y}_{50} = 11$, calcolare il valore previsto per la serie al tempo $t = 55$.

Soluzione:
Il processo ha la forma compatta

$$(1 - \phi B)(1 - \Phi B^4)Y_t = (1 - \theta B)(1 - \Theta B^4)\varepsilon_t$$

I polinomi AR e MA generalizzati sono pari a

$$(1 - \phi B)(1 - \Phi B^4) = 1 - \phi B - \Phi B^4 + \phi\Phi B^5$$

e

$$(1 - \theta B)(1 - \Theta B^4) = 1 - \theta B - \Theta B^4 + \theta\Theta B^5$$

Sfruttando queste espressioni, il processo originario può scriversi come

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \Phi Y_{t-4} - \phi\Phi Y_{t-5} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} - \Theta\varepsilon_{t-4} + \theta\Theta\varepsilon_{t-5}.$$

Il previsore di Y_{55} è dunque dato da

$$\hat{Y}_{55|50} = \hat{\phi}E_{50}[Y_{54}] + \hat{\Phi}E_{50}[Y_{51}] - \hat{\phi}\hat{\Phi}E_{50}[Y_{50}] + E_{50}[\varepsilon_{55}] - \hat{\theta}E_{50}[\varepsilon_{54}] - \hat{\Theta}E_{50}[\varepsilon_{51}] + \hat{\theta}\hat{\Theta}E_{50}[\varepsilon_{50}]$$

Essendo $E_{50}[\varepsilon_{50}] = y_{50} - \hat{y}_{50} = 12 - 11 = 1$, si ha:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{55} &= \hat{\phi} \cdot 8 + \hat{\Phi} \cdot 10 - \hat{\phi}\hat{\Phi} \cdot 12 + 0 - \hat{\theta} \cdot 0 - \hat{\Theta} \cdot 0 + \hat{\theta}\hat{\Theta} \cdot 1 \\ &= 0.5 \cdot 8 + 0.3 \cdot 10 - 0.5 \cdot 0.3 \cdot 12 + (-0.4) \cdot 0.2 \cdot 1 = 5.12 \end{aligned}$$

Domanda 3

Per la serie y_t è stato stimato un modello AR(2) con $\hat{\phi}_1 = 0.5$, $\hat{\phi}_2 = 0.2$ e $\hat{\sigma}^2_\varepsilon = 1.2$. Ottenere le stime di ρ_1, ρ_2 e ρ_3.

Soluzione:

Per il calcolo delle autocorrelazioni si può fare riferimento alla espressione generale

$$\rho_k = \phi_1 \cdot \rho_{k-1} + \phi_2 \cdot \rho_{k-2},$$

nella quale possiamo inserire le stime dei parametri.
Per $k = 1$ si ha:

$$\hat{\rho}_1 = 0.5 \cdot 1 + 0.2 \cdot \hat{\rho}_1$$

da cui

$$\hat{\rho}_1 = \frac{0.5}{1 - 0.2} = 0.625$$

Per $k = 2$ si ha:

$$\hat{\rho}_2 = 0.5 \cdot \hat{\rho}_1 + 0.2 \cdot 1 = 0.5 \cdot 0.625 + 0.2 = 0.512$$

Per $k = 3$ si ha:

$$\hat{\rho}_3 = 0.5 \cdot \hat{\rho}_2 + 0.2 \cdot \hat{\rho}_1 = 0.5 \cdot 0.512 + 0.2 \cdot 0.625 = 0.381$$

Domanda 4

La serie storica trimestrale y_t, $(t = 1, ..., 22)$ si riferisce ad una variabile economica osservata nel periodo 2020.3,...,2025.4. Su di essa è stato stimato il modello:

$$y_t = 6 + 0.2t + 0.05t^2 + 4d_{1t} + 3d_{3t} + 5d_{4t} + \varepsilon_t, \;\; \varepsilon_t \sim WN(0, 4)$$

dove d_{1t}, d_{3t} e d_{4t} sono variabili *dummy* relative al primo, al terzo ed al quarto trimestre.

1. Fornire una previsione puntuale e intervallare ($\alpha = 0.05$) per la serie relativamente ai trimestri 2026.2 e 2026.3.
2. Riscrivere il modello eliminando la costante tra i regressori.
3. Avendo osservato $y_{2025.2} = 30$, fornire il corrispondente valore destagionalizzato.
4. Dire, motivando la risposta, se la media mobile a cinque termini $y_t^* = \frac{1}{8}(y_{t-2} + 2y_{t-1} + 2y_t + 2y_{t+1} + y_{t+2})$ è idonea a stimare il trend.

Soluzione

1. I trimestri 2026.2 e 2026.3 corrispondono agli istanti $t = 24$ e $t = 25$, dunque le previsioni puntuali sono :

$$\hat{y}_{2026.2} = 6 + 0.2 \cdot 24 + 0.05 \cdot (24^2) = 39.6$$

$$\hat{y}_{2026.3} = 6 + 0.2 \cdot 25 + 0.05 \cdot (25^2) + 3 = 45.25$$

   e i corrispondenti intervalli predittivi:

$$39.6 \pm 1.96 \cdot \sqrt{4} = [35.68, 43.52]$$

$$45.25 \pm 1.96 \cdot \sqrt{4} = [41.33, 49.17]$$

2. Il modello senza costante si scrive:

$$y_t = 0.2t + 0.05t^2 + (6 + 4)d_{1t} + 6d_{2t} + (6 + 3)d_{3t} + (6 + 5)d_{4t} + \varepsilon_t, \;\; \varepsilon_t \sim WN(0, 4)$$

   cioè

$$y_t = 0.2t + 0.05t^2 + 10d_{1t} + 6d_{2t} + 9d_{3t} + 11d_{4t} + \varepsilon_t,$$

3. Coefficienti grezzi: CG=(10,6,9,11)
   Media(CG)=9
   Coefficienti ideali: CI=CG-Media(CG)=(1,-3,0,2)
   Valore destagionalizzato: $y^d_{2025.2} = y_{2025.2} - CI_2 = 30 + 3 = 33$

4. Il modello stimato evidenzia che la serie contiene un trend polinomiale quadratico. In questo caso, affinché il trend venga conservato devono essere soddisfatte le seguenti tre condizioni:

   - $\sum \theta_i = 1$
   - $\sum i\theta_i = 0$
   - $\sum i^2\theta_i = 0$

   Mentre le prime due condizioni sono soddisfatte la terza non lo è per cui la media mobile non è adatta a stimare il trend di y_t.

Domanda 5

Si descrivano gli strumenti statistici idonei alla implementazione della fase diagnostica della procedura di Box-Jenkins nel caso di modelli ARIMA stagionali.

Soluzione (traccia):
La fase diagnostica della procedura di B-J richiede di controllare:

- L'incorrelazione dei residui. La verifica di questo requisito può avvenire tramite l'analisi delle funzioni di autocorrelazione globale e parziale, con particolare attenzione ai ritardi stagionali; tramite il test di Ljung-Box (specificare ipotesi nulla e distribuzione asintotica) e il test di Pierce (specificare ipotesi nulla e distribuzione asintotica).
- La parsimonia del modello: tramite un test t per la significatività dei parametri e tramite i criteri tipo AIC e BIC.
- Si può verificare la gaussianità dei residui mediante il test di Jarque e Bera (specificare ipotesi nulla e distribuzione asintotica).
- L'analisi della stazionarietà ed invertibilità del modello stimato (e, in caso, opportunamente differenziato). Per la stazionarietà bisogna controllare che le radici del polinomio autoregressivo $\phi(B) * \Phi(B^S) = 0$ siano tutte in modulo maggiori di 1; per l'invertibilità che le radici del polinomio a media mobile $\theta(B) * \Theta(B^S) = 0$ siano tutte in modulo maggiori di 1.

Domanda 6

Dire **motivando la risposta**, se sono possibili le seguenti medie mobili (m.m.) e, in caso affermativo, fornirne un esempio:

1. m.m. asimmetrica che preserva un trend lineare;
2. m.m. centrata ma non simmetrica;
3. m.m. simmetrica di ordine pari;
4. m.m. di ordine dispari che elimina una componente periodica di ordine pari;
5. m.m. con pesi negativi che riduca la variabilità della componente di errore.

Soluzione:

1. Si, sebbene sia un caso infrequente, un esempio è dato dalla seguente m.m.

$$y_t^* = \frac{1}{4}y_{t-2} + \frac{1}{4}y_{t-1} - \frac{1}{4}y_t + \frac{3}{4}y_{t+1}$$

E' facile verificare che in questo caso $\sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i = 1$ e $\sum_{i=-m_1}^{m_2} i \cdot \theta_i = 0$. Tuttavia, nella pratica, questo tipo di m.m vengono raramente utilizzate perché spesso non godono di altre proprietà desiderabili.

2. Si, ad esempio la m.m.

$$y_t^* = \frac{3}{8}y_{t-1} + \frac{1}{2}y_t + \frac{1}{8}y_{t+1}$$

3. No, la condizione di simmetria richiede necessariamente un ordine dispari.

4. Si, ad esempio la m.m.

$$y_t^* = \frac{1}{8}(y_{t-2} + 2y_{t-1} + 2y_t + 2y_{t+1} + y_{t+2})$$

ottenuta come centratura di due medie mobili non centrate di ordine 4 elimina una componente periodica di ordine 4.

5. Si, il rapporto di riduzione della varianza è dato da $\sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i^2$; se questo è inferiore a 1, indipendentemente dal valore e dal segno dei singoli pesi, la variabilità della componente erratica viene ridotta. Un esempio è:

$$y_t^* = -\frac{1}{4}y_{t-1} + \frac{3}{4}y_t + \frac{2}{4}y_{t+1}$$

che ha un RRV pari a 0.875.