SERIE STORICHE

Padova, 11 settembre 2025

Nome Cognome N. matricola

Domanda 1

Sia $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ e si definisca il processo Y_t come segue:

$$Y_t = \begin{cases} 0,5\epsilon_t + \epsilon_{t-1} & \text{per } t \text{ pari} \\ 3 + 0,5\epsilon_t + \epsilon_{t-1} & \text{per } t \text{ dispari} \end{cases} \tag{1}$$

1. Si calcolino valore atteso, varianza e funzione di autocovarianza per il processo Y_t.
2. Si dica, giustificando la risposta, se Y_t è stazionario.

Soluzione:

1. Si ha:

$$E[Y_t] = \begin{cases} E[0,5\epsilon_t + \epsilon_{t-1}] = 0 & \text{per } t \text{ pari} \\ E[3 + 0,5\epsilon_t + \epsilon_{t-1}] = 3 & \text{per } t \text{ dispari} \end{cases}$$

$$Var[Y_t] = \begin{cases} Var[0,5\epsilon_t + \epsilon_{t-1}] = 0,5^2 Var(\epsilon_t) + Var(\epsilon_{t-1}) = 1,25\sigma^2 & \text{per } t \text{ pari} \\ Var[3 + 0,5\epsilon_t + \epsilon_{t-1}] = 0,5^2 Var(\epsilon_t) + Var(\epsilon_{t-1}) = 1,25\sigma^2 & \text{per } t \text{ dispari} \end{cases}$$

Inoltre, se t è pari, allora $t \pm 1$ è dispari, per cui:

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = E[Y_t(Y_{t-1} - 3)] = E[(0,5\epsilon_t + \epsilon_{t-1})(0,5\epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2})] = 0,5\sigma^2$$

Se t è dispari, allora $t \pm 1$ è pari, per cui:

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = E[(Y_t - 3)Y_{t-1}] = E[(0,5\epsilon_t + \epsilon_{t-1})(0,5\epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2})] = 0,5\sigma^2$$

Che t sia pari o dispari si ha che $Cov(Y_t, Y_{t\pm k}) = 0$ per $k \geq 2$.

2. Poiché il valore atteso di Y_t varia al variare di t il processo non è stazionario.

Domanda 2

Suggerire due opportune medie mobili:

a. asimmetrica in grado di eliminare un'onda periodica di periodo 6;

b. simmetrica in grado di eliminare un'onda periodica di periodo 6;

Per le due medie mobili individuate dire, motivando la risposta, se:

1. preservano un trend lineare;
2. preservano un trend cubico.

Soluzione :

a) Una m.m. aritmetica semplice a 6 termini, ad es:

$$y_t^* = \frac{1}{6}y_{t-3} + \frac{1}{6}y_{t-2} + \frac{1}{6}y_{t-1} + \frac{1}{6}y_t + \frac{1}{6}y_{t+1} + \frac{1}{6}y_{t+2}$$

b) La centratura di una m.m. aritmetica a 6 termini, cioè la m.m. a 7 termini:

$$y_t^* = \frac{1}{12}y_{t-3} + \frac{2}{12}y_{t-2} + \frac{2}{12}y_{t-1} + \frac{2}{12}y_t + \frac{2}{12}y_{t+1} + \frac{2}{12}y_{t+2} + \frac{1}{12}y_{t+3}$$

1) Per preservare un trend lineare deve essere:

$$\sum_i \theta_i = 1, \quad \sum_i i \cdot \theta_i = 0.$$

Queste condizioni sono rispettate dalla m.m. b) ma non dalla a)

2) Per preservare un trend cubico deve essere:

$$\sum_i \theta_i = 1, \quad \sum_i i \cdot \theta_i = 0, \quad \sum_i i^2 \cdot \theta_i = 0, \quad \sum_i i^3 \cdot \theta_i = 0.$$

Queste condizioni non sono rispettate da nessuna delle due m.m.

Domanda 3

Individuare un processo invertibile, appartenente alla classe dei processi ARIMA, che abbia la seguente funzione di autocovarianza:

$$\gamma_0 = 10, \;\; \gamma_1 = 0, \;\; \gamma_2 = 4, \;\; \gamma_k = 0 \;\; \forall k > 2$$

Soluzione:

La funzione di autocovarianza data è coerente con quella di un processo $MA(2)$ con il primo coefficiente a media mobile pari a zero:

$$X_t = \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-2}$$

dove $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$. Per tale processo avremo:

$$\gamma_0 = Var(X_t) = \sigma_\epsilon^2(1+\theta^2) = 10$$

$$\gamma_1 = Cov(X_t, X_{t-1}) = 0$$

$$\gamma_2 = Cov(X_t, X_{t-2}) = E[(\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-2})(\epsilon_{t-2} - \theta\epsilon_{t-4})] = -\theta\sigma_\epsilon^2 = 4$$

$$\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k}) = 0, \;\; \forall k \geq 2$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} \sigma_\epsilon^2(1+\theta^2) = 10 \\ -\theta\sigma_\epsilon^2 = 4 \end{cases}$$

che porta ad ottenere le due coppie di parametri: $(\theta = -2, \;\; \sigma_\epsilon^2 = 2)$ e $(\theta = -0.5, \;\; \sigma_\epsilon^2 = 8)$. Osserviamo che abbiamo quindi due processi compatibili con la funzione di autocovarianza data:

1. $X_t = \epsilon_t + 2\epsilon_{t-2}$ dove $\epsilon_t \sim WN(0, 2)$
2. $X_t = \epsilon_t + 0.5\epsilon_{t-2}$ dove $\epsilon_t \sim WN(0, 8)$

Osserviamo che il primo processo è non invertibile, in quanto

$$1 + 2B^2 = 0$$

porta a due radici (complesse) in modulo minori di uno, quindi il processo cercato è il secondo.

Domanda 4

Per la serie storica trimestrale y_t, $(t = 1, ..., 32)$, riferentesi ad una variabile di natura economica osservata nel periodo 2017.1-2024.4, è stato stimato il seguente modello:

$$y_t = 25 + 1.2t + 0.02t^2 - 8d_{2t} + 10d_{4t} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, 6)$$

dove d_{2t} e d_{4t} sono variabili *dummy* relative al secondo e al quarto trimestre. Per gli ultimi trimestri del 2024 sono stati osservati $y_{2024,3} = 30$ e $y_{2024,4} = 34$.

1. Fornire i valore destagionalizzati per gli ultimi due trimestri, $y^d_{2024,3}$ e $y^d_{2024,4}$.

2. A quanto ammonta la variazione dovuta alla sola componente tendenziale tra i trimestri 2024.1 e 2024.4?

Soluzione

1. Essendo presente la costante, quest'ultima rappresenta il coefficiente stagionale del primo (o, equivalentemente, del terzo) trimestre, mentre gli altri coefficienti rappresentano effetti differenziali rispetto al primo (terzo) trimestre.
Dato che non c'è una variabile dummy per il terzo (o, equivalentemente, del primo) trimestre, il corrispondente coefficiente stagionale grezzo è uguale a quello del primo (terzo) trimestre.

Coefficienti stagionali grezzi:

$$\gamma_1 = 25 \tag{2}$$
$$\gamma_2 = -8 + 25 = 17 \tag{3}$$
$$\gamma_3 = 25 \tag{4}$$
$$\gamma_4 = 10 + 25 = 35 \tag{5}$$

Dato che:

$$\sum_{i=1}^{4} \gamma_i = 102 \neq 0$$
$$\bar{\gamma} = 102/4 = 25.5$$

i coefficienti stagionali ideali sono dati da:

$$\gamma^*_1 = 25 - 25.5 = -0.5 \tag{6}$$
$$\gamma^*_2 = 17 - 25.5 = -8.5 \tag{7}$$
$$\gamma^*_3 = 25 - 25.5 = -0.5 \tag{8}$$
$$\gamma^*_4 = 35 - 25.5 = 9.5 \tag{9}$$

Quindi i valori destagionalizzati sono:

$$y^d_{2024,3} = 30 - (-0.5) = 30.5 \tag{10}$$
$$y^d_{2024,4} = 34 - 9.5 = 24.5 \tag{11}$$

2. Per quanto riguarda la variazione dovuta al trend:

$$\hat{T}_{2024,1} = 1.2 * 29 + 0.02 * 29^2 = 51.62 \tag{12}$$
$$\hat{T}_{2024,4} = 1.2 * 32 + 0.02 * 32^2 = 58.88 \tag{13}$$

e la variazione è data da

$$\hat{T}_{2024,4} - \hat{T}_{2024,1} = 58.88 - 51.62 = 7.26$$

Domanda 5

Si consideri il processo $Y_t = \mu + Y_{t-1} + \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim WN(0; \sigma^2)$ e $Y_0 = 0$. Si dica, giustificando la risposta, se tale processo presenta un trend deterministico e/o un trend stocastico.

Soluzione:
Il processo descritto è un RW con drift, che contiene sia un trend deterministico che un trend stocastico. Iterando la definizione del processo a partire da $Y_0 = 0$, al tempo t si ottiene:

$$Y_t = t \cdot \mu + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

$t \cdot \mu$ rappresenta il trend deterministico, mentre $\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$ descrive il trend stocastico.

Domanda 6

In relazione ad un modello AR(1) con costante e stazionario, ricavare:
a. la varianza del processo, $Var(Y_t)$;
b. la varianza del processo condizionata all'informazione passata, $Var(Y_t|I_{t-1})$.

Soluzione:

Il processo richiesto è il seguente:

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

a. La varianza del processo si può ricavare da:

$$Var(Y_t) = \phi_1^2 \, Var(Y_{t-1}) + Var(\varepsilon_t)$$

In virtù della stazionarietà si ha $Var(Y_t) = Var(Y_{t-1})$ e quindi:

$$Var(Y_t) = \phi_1^2 \, Var(Y_t) + \sigma^2$$

Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$Var(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}$$

b. Per la varianza condizionata si ha:

$$Var(Y_t|I_{t-1}) = \phi_1^2 \, Var(Y_{t-1}|I_{t-1}) + Var(\varepsilon_t|I_{t-1})$$

Nell'informazione passata I_{t-1} è compreso anche Y_{t-1}, che quindi è una quantità nota con varianza nulla. La varianza richiesta dipende quindi solo da quella dell'innovazione ε_t:

$$Var(Y_t|I_{t-1}) = 0 + \sigma^2 = \sigma^2$$