SERIE STORICHE

Padova, 14 luglio 2025

Nome Cognome N. matricola

Domanda 1

Si consideri il processo

$$X_t = \epsilon_t + 0.2\epsilon_{t-1} \qquad \text{con} \qquad \epsilon_t \sim IID\ N(0, 0.000625)$$

per $t = 1, 2, \ldots, 100$. Si supponga anche che $\epsilon_{100} = 0.01$.

1. Si calcoli la previsione un passo in avanti per X_t assieme all'errore standard del suo errore di previsione.
2. Si calcoli la previsione due passi in avanti per X_t assieme all'errore standard del suo errore di previsione.

Soluzione:

1. Si ha:
$$\hat{X}_{101} = E[X_{101} \mid I_{100}] = E[\epsilon_{101} + 0.2\epsilon_{100} \mid I_{100}]$$
ed essendo, per la regola dei valori attesi condizionati, $E[\epsilon_{101} \mid I_{100}] = 0$ risulta:
$$\hat{X}_{101} = 0.2\epsilon_{100} = 0.2 * 0.01 = 0.002.$$
L'errore di previsione è
$$e_{101} = X_{101} - \hat{X}_{101} = \epsilon_{101} + 0.2\epsilon_{100} - 0.2\epsilon_{100} = \epsilon_{101}$$
per cui
$$Var(e_{101}) = \sigma^2_\epsilon = 0.000625$$
da cui l'errore standard di previsione un passo in avanti risulta essere:
$$\sigma_\epsilon = \sqrt{0.000625} = 0.025.$$
2. Essendo il processo un $MA(1)$, la previsione h passi in avanti per $h > 1$ è pari a zero, quindi:
$$\hat{X}_{102} = 0$$
L'errore di previsione risulta quindi pari a:
$$e_{102} = X_{102} - 0 = \epsilon_{102} + 0.2\epsilon_{101}$$
da cui la varianza dell'errore di previsione:
$$Var(e_{102}) = Var(\epsilon_{102} + 0.2\epsilon_{101}) = \sigma^2_\epsilon + 0.04\sigma^2_\epsilon = 0.00065$$
e quindi l'errore standard risulta essere 0.0255.

Domanda 2

Dato un modello SARIMA(0,0,1)$\times$(1,1,0)$_4$, calcolare la previsione con orizzonte temporale $k = 8$ sapendo che

- il parametro AR stagionale Φ_1 è pari a 0.3;
- l'ultimo valore osservato della serie storica è $y_n = 4$;
- $\hat{y}_{n+4|n} = 2$.

Soluzione (Es. 7.6 Eserciziario):

Il processo ha la forma compatta:

$$(1 - \Phi_1 B^4)(1 - B^4)Y_t = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t.$$

Il polinomio AR generalizzato è pari a:

$$(1 - \Phi_1 B^4)(1 - B^4) = 1 - \Phi_1 B^4 - B^4 + \Phi_1 B^8.$$

Sfruttando questa espressione, il processo originario si trasforma in:

$$Y_t = (1 + \Phi_1)Y_{t-4} - \Phi_1 Y_{t-8} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}.$$

Il previsore di Y_{n+8} è dunque pari a:

$$\hat{Y}_{n+8|n} = (1 + \Phi_1)E_n[Y_{n+4}] - \Phi_1 E_n[Y_n] + E_n[\varepsilon_{n+8}] - \theta_1 E_n[\varepsilon_{n+7}].$$

Pertanto, la previsione di Y_{n+8} secondo questo processo è:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{n+8|n} &= (1 + \Phi_1)\hat{y}_{n+4|n} - \Phi_1 y_n \\ &= 1.3 \cdot 2 - 0.3 \cdot 4 = 2.6 - 1.2 = 1.4. \end{aligned}$$

Domanda 3

Sia

$$Y_t = 0.5 + 1.5t - 3d_{2t} + 2d_{3t} - 2d_{4t} + \varepsilon_t,$$

dove $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ e d_{2t}, d_{3t} e d_{4t} variabili *dummy* relative al secondo, al terzo e al quarto trimestre.
Si consideri $X_t = (1 - B^4)Y_t$.

1. Verificare se X_t è stazionario.
2. Calcolare la funzione di autocorrelazione di X_t.

Soluzione:

$X_t = (1-B^4)Y_t = Y_t - Y_{t-4} = (0.5+1.5t-3d_{2t}+2d_{3t}-2d_{4t}+\varepsilon_t) - (0.5+1.5(t-4)-3d_{2t}+2d_{3t}-2d_{4t}+\varepsilon_{t-4})$

Le dummy stagionali si eliminano con la differenziazione, quindi il processo da analizzare rimane: $X_t = 6 + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-4}$.

1. Per verificare se X_t è stazionario calcolo media, varianza e covarianza:
   - Media: $E[X_t] = 6$
   - Varianza: $Var[X_t] = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2$
   - Funzione di autocovarianza di X_t:

$$\begin{aligned} \gamma_k = Cov[X_t, X_{t-k}] &= E[X_t X_{t-k}] - E[X_t]E[X_{t-k}] \\ &= E[(6 + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-4})(6 + \varepsilon_{t-k} - \varepsilon_{t-k-4})] - (6 \cdot 6) \\ &= E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-k} - \varepsilon_t\varepsilon_{t-k-4} - \varepsilon_{t-4}\varepsilon_{t-k} + \varepsilon_{t-4}\varepsilon_{t-k-4}] \end{aligned}$$

   Per $k = 0$ si ha: $\gamma_0 = Var[X_t] = 2\sigma^2$
   Per $k = 4$ si ha: $\gamma_4 = E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-4} - \varepsilon_t\varepsilon_{t-8} - \varepsilon_{t-4}\varepsilon_{t-4} + \varepsilon_{t-4}\varepsilon_{t-8}] = -\sigma^2$
   Per $k \neq \{0; 4\}$ si ha: $\gamma_k = 0$, essendo ε_t indipendenti.

   Dato che media, varianza e covarianza non dipendono da t, e quest'ultima dipende solo da k, il processo X_t è stazionario.

2. Per ottenere la funzione di autocorrelazione basta considerare $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$:

$$\rho_0 = 1$$
$$\rho_4 = \frac{-\sigma^2}{2\sigma^2} = -0.5$$
$$\rho_k = 0, \quad k \neq \{0; 4\}$$

Domanda 4

Dal modello

$$y_t = 0.5t + 0.04t^2 - 8d_{1t} + 3d_{2t} + d_{3t} - 2d_{4t} + \varepsilon_t,$$

dove $\varepsilon_t \sim MA(1)$ con $\theta = 0.5$ e d_{1t}, d_{2t}, d_{3t} e d_{4t} variabili *dummy* relative al primo, al secondo, al terzo e al quarto trimestre, è stata generata la serie y_t (t=1,2,....,48).

Si vogliono utilizzare tre medie mobili a partire dalla serie y_t:

- una media mobile semplice di ordine 4;
- una media mobile semplice di ordine 5;
- una media mobile ottenuta come centratura di una media mobile semplice di ordine 4.

1. Dire se e quali di queste tre medie mobili sono adatte per la stima del trend di y_t.
2. Calcolare il rapporto di riduzione della varianza residua delle tre medie mobili.

Soluzione:

1. Dato che il trend da stimare è quadratico devono essere soddisfatte tre condizioni:
   - $\sum \theta_i = 1$ è soddisfatta da tutte le tre medie mobili proposte.
   - $\sum i\theta_i = 0$ è soddisfatta dalle ultime due perché simmetriche.
   - $\sum i^2\theta_i = 0$ non è soddisfatta da nessuna perché i coefficienti sono tutti positivi.

   Di conseguenza nessuna delle tre medie mobili proposte è adatta alla stima del trend di y_t.

2. Il rapporto di riduzione della varianza residua delle prime due medie mobili è rispettivamente 1/4 e 1/5 per le proprietà delle medie mobili semplici.
   Per la terza il rapporto è dato da $\sum \theta_i^2 = (1 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1)/8^2 = 14/64 = 0.219$.

Domanda 5

Dopo aver definito lo stimatore dell'autocovarianza $\hat{\gamma}_k$ per un processo stocastico stazionario, spiegare che cosa descrivono rispettivamente la funzione di autocovarianza, di autocorrelazione e di autocorrelazione parziale.

Soluzione (traccia):

- Stima consistente dell'autocovarianza di un processo stazionario:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(y_t - \hat{\mu})(y_{t+k} - \hat{\mu}), \qquad \hat{\mu} = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t$$

- $\gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t-k})$ descrive la relazione o dipendenza lineare tra Y_t e Y_{t-k}. Si tratta di una misura non standardizzata.

- $\rho_k = Corr(Y_t, Y_{t-k}) = \gamma_k/\gamma_0$ descrive lo stesso tipo di dipendenza ma standardizzata in modo che vari tra -1 e 1.

- $P_k = Corr(Y_t, Y_{t-k} \mid Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, Y_{t-k+1})$ descrive la dipendenza lineare esistente tra Y_t e Y_{t-k} al netto delle variabili intermedie. Anch'essa varia tra -1 e 1.

Domanda 6

Dopo avere definito una media mobile M, specificare quando una media mobile è rispettivamente: a) semplice; b) centrata; c) simmetrica.

Dire inoltre quali di questi casi sono possibili e fornirne un esempio:

1. media mobile semplice e centrata;

2. media mobile simmetrica e non centrata;

3. media mobile semplice e non simmetrica.

Soluzione (traccia):

Una media mobile y_t^* di ordine $m_1 + m_2 + 1$ è una media ponderata con pesi θ dei valori assunti da y_t nella finestra di tempo mobile fra $t - m_1$ e $t + m_2$:

$$y_t^* = \sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i y_{t+i}$$

a) La media mobile è semplice quando i pesi sono tutti uguali.
b) La media mobile è centrata quando $m_1 = m_2 = m$.
c) La media mobile è simmetrica quando per ogni $i : \theta_i = \theta_{-i}$

1. Una media mobile semplice e centrata è sempre possibile se l'ordine è dispari.
   Esempio ordine 3:
   $$y_t^* = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3}$$

2. Una media mobile simmetrica e non centrata non è mai possibile, perché se non è centrata c'è sicuramente almeno un θ_i che non ha un corrispondente θ_{-i}.

3. Una media mobile semplice è simmetrica se è centrata, in tutti gli altri casi non è simmetrica, ad esempio (ma non solo) se l'ordine è pari.
   Esempio ordine 4:
   $$y_t^* = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2}}{4}$$