SERIE STORICHE

Padova, 19 giugno 2025

Nome Cognome N. matricola

Domanda 1

Siano dati un processo $\nu_t \sim WN(0, \sigma_\nu^2)$ ed il processo stocastico $(1-B^4)X_t = \epsilon_t$ con $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$ indipendente da ν_t.

1. Dire che tipo di processo sono, rispettivamente, X_t e $Z_t = (1 - B^4)X_t$.
2. Dire (giustificando la risposta) che tipo di processo è $W_t = Z_t + \nu_t$.
3. Calcolare la funzione di autocorrelazione globale di W_t.

Soluzione:

1. X_t è un processo $SARIMA(0,0,0)(0,1,0)_4$, mentre $Z_t = (1 - B^4)X_t = X_t - X_{t-4} = \epsilon_t$ è ovviamente un White Noise.
2. $W_t = Z_t + \nu_t = \epsilon_t + \nu_t$ è la somma di due WN indipendenti, ha quindi media nulla, varianza pari alla somma delle varianze e autocovarianze nulle. Quindi $W_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\nu^2)$
3. Ovviamente, essendo $W_t \sim WN$ ha tutte le autocorrelazioni nulle.

Domanda 2

La funzione di autocovarianza di un processo stocastico X_t è pari a:

$$\gamma_k = \begin{cases} 8 & k = 0 \\ 2 & k \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Dire, giustificando la risposta, con che modello della classe ARIMA questa funzione di autocovarianza è coerente.
2. Si calcolino i valori dei parametri del modello, stazionario e invertibile, indicato al punto precedente.

Soluzione

1. La funzione di autocovarianza data è diversa da zero solo per il primo ritardo e poi è sempre nulla. Questo è coerente con un modello a media mobile di ordine 1, MA(1), o ARIMA(0,0,1).

2. Un modello MA(1) può scriversi come:

$$x_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

con ε_t $WN(0, \sigma^2)$. I due parametri da calcolare sono quindi θ e σ^2.

Sappiamo che, per un processo MA(1), si hanno:

$$\gamma_0 = Var(X_t) = (1 + \theta^2)\sigma^2 = 8$$
$$\gamma_1 = Cov(X_t, X_{t-1}) = -\theta\ \sigma^2 = 2$$

Da questo sistema di due equazioni in due incognite si ricavano:

$$\sigma^2 = -2/\theta$$

$$-\frac{1 + \theta^2}{\theta} = 8/2$$

Risolvendo l'equazione $\theta^2 + 4\theta + 1 = 0$ si ottengono le due soluzioni:
$\theta_{(1)} = -0.268$ e $\theta_{(2)} = -3.732$

Di queste si considera solo $\theta_{(1)}$ perché $\theta_{(2)}$ è in modulo maggiore di 1 e porta ad un processo MA(1) non invertibile. Sostituendo $\theta_{(1)}$ in una delle due equazioni precedenti si trova il valore di $\sigma^2 = 7.463$.
Dunque, il modello MA(1) stazionario e invertibile cui corrisponde la funzione di autocovarianza data è:

$$x_t = \varepsilon_t + 0.268\varepsilon_{t-1}$$

con ε_t $WN(0, 7.463)$.

Domanda 3

Si consideri la media mobile

$$y_t^* = \frac{1}{4}(y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1})$$

e si ipotizzi di applicarla ad una serie storica generata dalla somma di una componente stagionale costante di periodo 4 e di un trend lineare.

1. Dire se questa media mobile è in grado di eliminare la componente periodica.
2. Dire se questa media mobile è adatta a stimare il trend e quale accorgimento andrebbe eventualmente adottato per trattare correttamente questa componente.
3. Se la media mobile in questione venisse applicata ad un *white noise*, la serie perequata risulterebbe più o meno variabile di quella originale? Quantificare il miglioramento o il peggioramento.

Soluzione:

1. Si, perché una media mobile semplice di ordine 4 elimina una componente stagionale di periodo 4. Tale risultato è garantito anche da una media mobile non centrata e asimmetrica, come quella di questo esercizio.
2. Ci sono due modi alternativi per mostrare che tale media mobile non risulta adatta a stimare il trend. Il primo è che non rispetta una delle condizioni per conservare un trend lineare:

$$\sum i \cdot \theta_i = \frac{1}{4}(-2 - 1 + 0 + 1) \neq 0$$

In alternativa, definiamo il trend lineare $T_t = a + bt$ e applichiamo la media mobile in questione:

$$\begin{aligned} T_t^* &= \frac{1}{4}T_{t-2} + \frac{1}{4}T_{t-1} + \frac{1}{4}T_t + \frac{1}{4}T_{t+1} \\ T_t^* &= \frac{1}{4}(a + b(t-2)) + \frac{1}{4}(a + b(t-1)) \\ &\quad + \frac{1}{4}(a + bt) + \frac{1}{4}(a + b(t+1)) \\ T_t^* &= a + bt - \frac{1}{2}b \end{aligned}$$

La stima del trend T_t^* differisce da quello originale T_t per la differente intercetta $(a - \frac{1}{2}b)$. Pur mantenendo lo stesso coefficiente angolare, non si può affermare che tale media mobile risulti adatta per la stima di un trend lineare.

Più consona risulterebbe l'applicazione di una media mobile semplice centrata e simmetrica:

$$y_t^{**} = \frac{y_t^* + y_{t+1}^*}{2}, \quad t = 3, \ldots, n-2.$$

3. Il rapporto di riduzione della varianza è pari a $4 \cdot 0,25^2 = 0,25$, per cui la serie perequata risulterebbe meno variabile di quella originaria (la variabilità del suo termine di disturbo ε_t^* si riduce ad un quarto di quella del disturbo ε_t).

Domanda 4

La serie storica y_t, $(t = 1, ..., 24)$ si riferisce ad una variabile economica osservata trimestralmente nel periodo 2019.1-2024.4. Per essa è stato stimato il seguente modello:

$$y_t = 0.5t + 0.04t^2 - 8d_{1t} + 3d_{2t} + d_{3t} + \varepsilon_t, \;\; \varepsilon_t \sim WN(0, 4)$$

dove d_{1t}, d_{2t} e d_{3t} sono variabili *dummy* relative al primo, al secondo e al terzo trimestre. Per gli ultimi trimestri del 2024 sono stati osservati $y_{2024,3} = 30$ e $y_{2024,4} = 34$.

1. Fornire i valori di $\hat{y}_{2024,3}$ $\hat{y}_{2024,4}$, stimati dal modello.
2. Fornire degli intervalli di confidenza al livello 95% per i valori stimati al punto precedente.
3. A quanto ammonta la variazione dovuta alla componente di trend tra i trimestri 2020.1 e 2021.4?
4. Fornire i valore destagionalizzati per gli ultimi due trimestri, $y^d_{2024,3}$ e $y^d_{2024,4}$.

Soluzione

1. Le ultime due osservazioni corrispondono a $t = 23$ e $t = 24$ e si riferiscono al terzo e al quarto trimestre, dunque:

$$\hat{y}_{2024,3} = 0.5 \cdot 23 + 0.04 \cdot 23^2 + 1 = 33.66$$
$$\hat{y}_{2024,4} = 0.5 \cdot 24 + 0.04 \cdot 24^2 + 0 = 35.04$$

2. Essendo noti tutti i parametri l'unico elemento stocastico nel modello è l'errore WN di varianza pari a 4, quindi $\sigma = 2$.
Gli intervalli di confidenza saranno dunque del tipo $\hat{y}_t \pm z_{\alpha/2}\sigma$:
$33.66 \pm 1.96 \cdot 2 = [29.74, 37.58]$
$35.04 \pm 1.96 \cdot 2 = [31.12, 38.96]$.

3. La componente di trend è descritta da $T_t = 0.5t + 0.04t^2$
Il trimestre 2020.1 corrisponde a $t = 5$
il trimestre 2021.4 corrisponde a $t = 12$
dunque $\Delta T = T_{12} - T_5 = (0.5 \cdot 12 + 0.04 \cdot 12^2) - (0.5 \cdot 5 + 0.04 \cdot 5^2) = 8.260$.

4. Coefficienti grezzi:
CG=(-8,3,1,0)
Media(CG)=-1
Coefficienti ideali:
CI=CG-Media(CG)=(-7,4,2, 1)
Valori destagionalizzati:
$y^d_{2024,3} = y_{2024,3} - CI_3 = 30 - 2 = 28$
$y^d_{2024,4} = y_{2024,4} - CI_4 = 34 - 1 = 33$

Domanda 5

Descrivere cosa sono le equazioni di Yule-Walker e spiegare a cosa servono.

Soluzione (traccia):

Le equazioni di Yule-Walker sono utilizzate per il calcolo delle autocorrelazioni di un processo $AR(p)$ a partire dai parametri del processo, o viceversa per stimare i parametri a partire dalle autocorrelazioni.

Le autocorrelazioni di un $AR(p)$ sono infatti legate fra loro dalla seguente equazione ricorsiva:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \ldots + \phi_p \rho_{k-p} \quad k > 0$$

Dato che ogni ρ_i dipende dagli altri, per calcolarli bisogna risolvere un sistema di p equazioni:

$$\begin{cases} \rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \ldots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_p \rho_{p-2} \\ \quad \ldots \\ \rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \ldots + \phi_p \end{cases}$$

Domanda 6

Si consideri una serie storica di n dati mensili, $\{y_t\}_{t=1}^n$, contenente un trend evolutivo e una componente periodica: si dica come ottenere una stima della serie destagionalizzata utilizzando le medie mobili in riferimento ad un modello moltiplicativo.

Soluzione (traccia):

Modello moltiplicativo con trend T_t e componente periodica S_t :

$$y_t = T_t S_t \varepsilon_t$$

Una serie destagionalizzata utilizzando le medie mobili può essere ottenuta con i seguenti passi:

i. Stima preliminare del trend con una media mobile y_t^{**} adatta per serie mensili con $s = 12$

ii. Indici specifici di stagionalità:
$$IS_t = \frac{y_t}{y_t^{**}} \approx S_t \varepsilon_t$$

iii. Indici grezzi di stagionalità:
$$\hat{S}_j^* = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} IS_{t,j}, \quad j = 1, \ldots, 12$$

iv. Indici ideali di stagionalità:
$$\hat{S}_j = \frac{\hat{S}_j^*}{\sqrt[12]{\prod_{j=1}^{12} \hat{S}_j^*}}$$

v. La serie destagionalizzata si ottiene quindi come: $y_t^d = \dfrac{y_t}{\hat{S}_t}$