SERIE STORICHE

Padova, 20 gennaio 2025

Nome Cognome N. matricola

Domanda 1
Si consideri il processo $Y_t = \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ e $|\phi_2| < 1$
1. Dire a che classe di processi appartiene Y_t.
2. Dire, giustificando la risposta, se il processo è stazionario.
3. Calcolare i valori attesi condizionati $E[Y_t|I_{t-2}]$ ed $E[Y_t|I_{t-1}]$. Commentare il risultato ottenuto.
4. Calcolare $Cov(Y_t; Y_{t-1})$ e $Cov(Y_t; Y_{t-2})$.

Soluzione:

1. Il processo Y_t appartiene alla classe dei processi AR(2), in particolare è un AR(2) vincolato.

2. Il processo si può scrivere come $(1 - \phi_2 B^2)Y_t = \varepsilon_t$. Affinché il processo sia stazionario le radici dell'eq. caratteristica $(1 - \phi_2 B^2) = 0$ devono essere in modulo maggiori di 1. Nel caso in questione le radici sono:

$$B_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{\phi_2}}$$

e affinché siano esterne al cerchio unitario deve essere $|\phi_2| < 1$ che è uno degli assunti; pertanto il processo è stazionario.

3. Applicando la regola dei valori attesi condizionati si ottiene:

$$E[Y_t|I_{t-2}] = E[\phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t|I_{t-2}] = \phi_2 y_{t-2}$$
$$E[Y_t|I_{t-1}] = E[\phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t|I_{t-1}] = \phi_2 y_{t-2}.$$

Il risultato non cambia perché la conoscenza aggiuntiva di y_{t-1} non serve a prevedere Y_t.

4. Si consideri che Y_t è un processo stazionario a media nulla e che $\varepsilon_t \sim WN$ e quindi sono incorrelati tra loro.

$$\gamma_1 = E[(\phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t)Y_{t-1}] = \phi_2 E(Y_{t-2}Y_{t-1}) + E(\varepsilon_t Y_{t-1}) = \phi_2 \gamma_1$$

da cui $(1 - \phi_2)\gamma_1 = 0$ e dunque $\gamma_1 = 0$.

$$\gamma_2 = E[(\phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t)Y_{t-2}] = \phi_2 E(Y_{t-2}^2) + E(\varepsilon_t Y_{t-2}) = \phi_2 \gamma_0$$

La varianza può essere calcolata da:

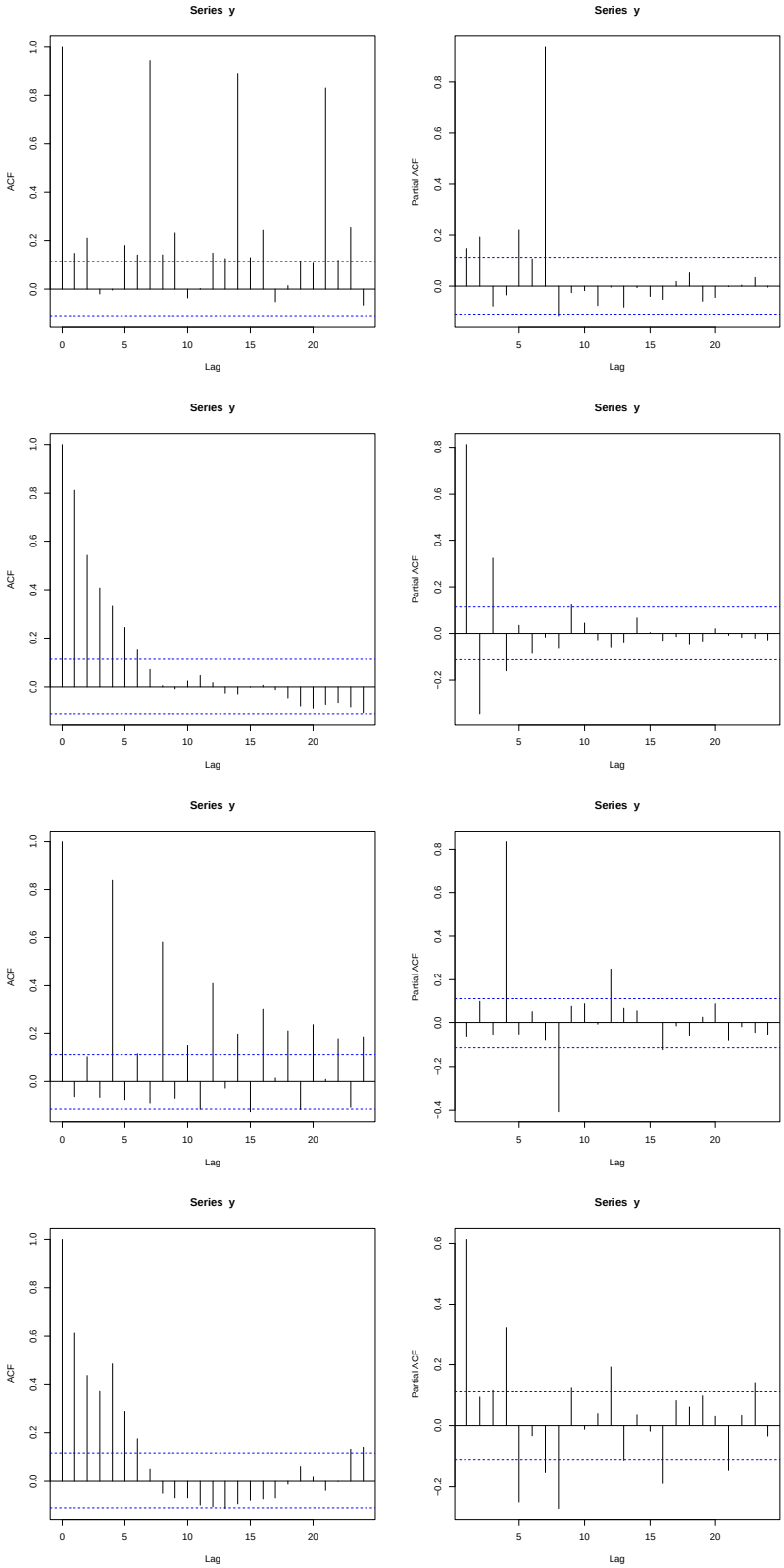
$$\gamma_0 = E[(\phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t)^2] = \phi_2^2 \gamma_0 + \sigma^2$$

da cui $(1 - \phi_2^2)\gamma_0 = \sigma^2$ e dunque

$$\gamma_2 = \frac{\phi_2}{1 - \phi_2^2}\sigma^2$$

Domanda 2

Per ciascuna coppia di ACF e PACF, suggerire un possibile processo generatore della classe SARIMA, con essa compatibile.



Soluzione

1. SARIMA$(0,0,0)(0,1,0)_7$
2. SARIMA$(1,0,1)(0,0,0)$ periodo non definito.
3. SARIMA$(0,0,0)(1,0,1)_4$
4. SARIMA$(1,0,0)(0,0,1)_4$

Domanda 3

Si consideri la serie storica trimestrale $y_t = (4.44, 9.77, 5.21, 1.61, 3.65, 7.40, 3.33, 2.98, 3.62, 8.25, 6.29, 4.28, 2.90, 8.32, 5.29, 1.15)$ che si riferisce al periodo 2020.1 - 2023.4.
L'applicazione di una media mobile ottenuta come centratura di una media mobile semplice a 4 termini ha portato ai valori riportati in tabella:

anno/trim	I	II	III	IV
2020	–	–	5.16	4.76
2021	4.23	4.17	4.34	4.44
2022	4.92	5.45	5.52	5.44
2023	5.32	4.81	–	–

Sulla base di queste informazioni fornire i valori destagionalizzati della serie per gli ultimi due trimestri del 2023.

Soluzione:
I valori riportati nella tabella, essendo ottenuti applicando una mm che è la centratura di una media mobile semplice di ordine 4, rappresentano la stima di un possibile trend ($\hat{T}_t$), anche costante, contaminata dall'errore.

Sottraendo ai dati osservati i valori del trend (valori riportati in tabella) si ottengono i coefficienti di stagionalità specifici (CS):

$$CS_t = y_t - \hat{T}_t$$

Nel nostro caso, organizzandoli in tabella, si ha:

anno/trim	I	II	III	IV
2020	–	–	0.05	-3.15
2021	-0.58	3.23	-1.01	-1.46
2022	-1.30	2.80	0.77	-1.16
2023	-2.42	3.51	–	–

I coefficienti grezzi (CG) si ottengono facendo una media dei coefficienti specifici dello stesso trimestre (media per colonna dei valori in tabella). Così facendo si ha:

$$CG = (-1.43, 3.18, -0.06, -1.92)$$

Dato che la media dei coefficienti grezzi è pari a $-0.06 \neq 0$, per la destagionalizzazione bisogna considerare i coefficienti ideali (CI), ottenuti sottraendo ai coefficienti grezzi la loro media:

$$CI = CG - (-0.06) = (-1.37, 3.24, 0.00, -1.86)$$

Dunque i valori destagionalizzati richiesti sono :

$$y^d_{2023,3} = 5.29 - 0 = 5.29$$

$$y^d_{2023,4} = 1.15 - (-1.86) = 3.01$$

Domanda 4

La serie storica y_t, $(t = 1, ..., 21)$ si riferisce ad una variabile economica osservata trimestralmente nel periodo 2018.1-2023.1. Per essa è stato stimato il seguente modello:

$$y_t = 5 + 0.8t + 0.02t^2 - 8.5d_{2t} - 3d_{3t} + d_{4t} + \varepsilon_t, \;\; \varepsilon_t \sim WN(0, 3)$$

dove d_{2t}, d_{3t} e d_{4t} sono variabili *dummy* relative al secondo, al terzo ed al quarto trimestre.

1. Riscrivere il modello eliminando la costante tra i regressori.
2. A quanto ammonta la variazione dovuta alla componente di trend tra i trimestri 2020.1 e 2021.4?
3. Avendo osservato $y_{21} = 18$, fornire il corrispondente valore destagionalizzato.

Soluzione

1. Il modello senza costante si scrive:

$$y_t = 0.8t + 0.02t^2 + 5d_{1t} + (5 - 8.5)d_{2t} + (5 - 3)d_{3t} + (5 + 1)d_{4t} + \varepsilon_t, \;\; \varepsilon_t \sim WN(0, 3)$$

2. La componente di trend è descritta da $T_t = 0.8t + 0.02t^2$.
   Il trimestre 2020.1 corrisponde a $t = 9$
   il trimestre 2021.4 corrisponde a $t = 16$
   dunque $\Delta T = T_{16} - T_9 = (0.8 \cdot 16 + 0.02 \cdot 16^2) - (0.8 \cdot 9 + 0.02 \cdot 9^2) = 17.92 - 8.82 = 9.10$
3. Coefficienti grezzi:
   CG=(5,-3.5,2,6)
   Media(CG)=2.375
   Coefficienti ideali:
   CI=CG-Media(CG)=(2.625,-5.875,-0.375,3.625)
   Valore destagionalizzato:
   $y^d_{21} = y_{21} - CI_1 = 18 - 2.625 = 15.375$

Domanda 5

Si considerino i due processi $Y_t = a + b \cdot t + \varepsilon_t$ e $X_t = b + X_{t-1} + \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.
Si descrivano le caratteristiche dei due processi evidenziandone le differenze.

Soluzione:

Il processo Y_t contiene un trend deterministico lineare con pendenza b e quindi non è stazionario. Se assumiamo che gli errori ε_t siano WN (o comunque stazionari) il processo diventa stazionario una volta eliminato il trend deterministico (processo trend-stazionario). Il trend può essere eliminato con un'opportuna stima o con differenziazione; nel secondo caso rimane una costante.
Il processo X_t è un Random Walk con drift. Anche questo processo quindi non è stazionario e contiene un trend stocastico eliminabile tramite differenziazione. Il processo contiene anche un trend deterministico dovuto alla presenza del drift b, che rimane come costante dopo la differenziazione.

Domanda 6

Per la serie y_t è stato stimato un modello SARIMA$(1,0,1)(1,0,1)_7$. Descrivere le analisi diagnostiche necessarie per valutare che il modello sia stato correttamente identificato e stimato.

Soluzione:

- Autocorrelazioni non significative a tutti i ritardi. Trattandosi di un modello stagionale di periodo 7 particolare attenzione deve essere posta ai ritardi multipli di 7. A tal riguardo, oltre all'analisi grafica dell'ACF e della PACF si possono usare il test di Ljung-Box che verifica l'incorrelazione congiunta dei primi m ritardi e il test di Pierce che verifica l'incorrelazione congiunta dei primi m ritardi stagionali.
- Stazionarietà: le radici del polinomio autoregressivo $\phi^*(B) = (1 - \phi B) \cdot (1 - \Phi B^7)$ devono essere in modulo maggiori di 1.
- Invertibilità: le radici del polinomio a media mobile $\theta^*(B) = (1 - \theta B) \cdot (1 - \Theta B^7)$ devono essere in modulo maggiori di 1.
- Significatività dei parametri.
- I residui non devono mostrare particolari regolarità.
- Si può verificare la gaussianità dei residui mediante il test di Jarque e Bera.
- Non ci sono modelli che soddisfano i punti precedenti e hanno valori di AIC e BIC inferiori.