SERIE STORICHE

Padova, 17 luglio 2024

Nome Cognome N. matricola

Corso di Laurea

Domanda 1

Sia data una serie storica trimestrale, $y_t,\ t = 1, 2, \ldots, 12$, in cui la prima osservazione corrisponde al secondo trimestre del 2017. A partire dalla serie si stima il seguente modello lineare con trend parabolico ed una stagionalità costante rappresentata tramite le variabili dummy D_1, D_2 e D_3:

$$y_t = 30 + t - 0.1t^2 - D_1 - 2D_2 - 3D_3 + \epsilon_t,$$

con $\sigma^2_\epsilon = 4$ dove:

$$D_i = \begin{cases} 1 & \text{se } t \text{ corrisponde all'i-esimo trimestre} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad i = 1,\ 2,\ 3$$

1. Esplicitare la matrice dei regressori del modello.
2. Calcolare i valori previsti dal modello per i trimestri del 2020 non coperti dalla serie storica osservata.
3. Sapendo che l'osservazione relativa al primo trimestre del 2020 è pari a 20.5, calcolarne il valore destagionalizzato.

Soluzione

1. La matrice dei regressori del modello si ottiene sostituendo per ognuna delle 12 osservazioni il valore assunto dalle variabili esplicative nel periodo corrispondente:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 36 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 49 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 64 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 81 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 100 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 11 & 121 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 12 & 144 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. I trimestri dell'anno 2020 non coperti dalla serie sono il secondo, il terzo e il quarto, corrispondenti a valori di t pari a, rispettivamente, 13, 14 e 15. Pertanto i valori previsti per questi 3 trimestri sono i seguenti:

$$\hat{y}_{13} = 30 + 13 - 0.1 \cdot 169 - 2 = 24.1$$

$$\hat{y}_{14} = 30 + 14 - 0.1 \cdot 196 - 3 = 21.4$$

$$\hat{y}_{15} = 30 + 15 - 0.1 \cdot 225 = 22.5$$

3. Con la parametrizzazione proposta, avente come baseline il quarto trimestre, i coefficienti delle dummy stagionali sono rispettivamente pari a (-1, -2, -3, 0), con media -6/4=-1,5. Per avere coefficienti (ideali) a media nulla è quindi sufficiente scartare i coefficienti delle dummy stagionali dalla media, che equivale ad aggiungere 1,5 a ciascuno di essi, ottenendo quindi (0,5, -0,5, -1,5, 1,5).

   $$y^* = y - \text{stagionalità}$$

   Il valore destagionalizzato si ottiene sottraendo al valore osservato il coefficiente ideale di stagionalità relativo al primo trimestre, pari a 0.5. Si ottiene quindi:

   $$\hat{y}^*_{2020} = 20,5 - 0,5 = 20$$

   [N.B. Si sarebbe giunti al medesimo risultato anche con una parametrizzazione diversa. Ad esempio, eliminando la costante i coefficienti delle dummy stagionali risultano pari a (29, 28, 27, 30) che, scartati dalla media 28.5, danno nuovamente (0.5, -0.5, -1.5, 1.5).]

Domanda 2

Si consideri la seguente serie storica:

$$x = (-0.1472, 0.3768, 1.1518, -0.0502, 0.4188, 1.2418, -0.4212, -1.2702, -1.0222, -0.2782),$$

per cui $\bar{x} = 0$ e $\hat{\sigma}_x^2 = 0.6123$. Si adatti atale serie un modelo AR(1), quindi:

1. Si stimi col metodo di Yule-Walker li parametro autoregressivo.
2. Si stimi la varianza del termine d'errore,
3. Si prevedano i valori x_{11}, x_{12}, x_{20}, e x_{100}.

Soluzione

1. Le equazioni di Yule-Walker dicono che:

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho k - 2 + \ldots + \phi_p\rho_{k-p} \quad k > 0$$

Nel caso di un AR(1) si riducono a $\rho_1 = \phi_1$ quindi $\hat{\rho}_1 = \hat{\phi}_1$. Sappiamo che $\hat{\rho}_1 = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_0}$ e $\hat{\gamma}_0 = \hat{\sigma}_x^2 = 0.6123$. Calcoliamo $\hat{\gamma}_1$.

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_1 &= \frac{1}{10}\sum_{t=1}^{9}(x_t - \bar{x})(x_{t+1} - \bar{x}) = \frac{1}{10}\sum_{t=1}^{9} x_t x_{t+1} \\ &= \frac{1}{10}\left((-0.1472)(0.3768) + 0.3768(1.1518) + \ldots + (-1.0222)(0.2782)\right) = 0.2414\end{aligned}$$

da cui ricaviamo:

$$\hat{\rho}_1 = \hat{\phi}_1 = \frac{0.2414}{0.6123} = 0.3943$$

2. Per un processo AR(1):

$$\gamma_0 = \sigma_x^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \phi_1^2}.$$

Allora

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \hat{\sigma}_x^2(1 - \hat{\phi}_1^2) = 0.5171.$$

3. Per un processo AR(1) le previsioni sono del tipo:

$$x_t(h) = \phi_1^h x_t$$

per cui

$$x_{10}(1) = \hat{x}_{11} = \hat{\phi}_1 x_{10} = 0.3943 \cdot (-0.2782) = -0.1097$$

$$x_{10}(2) = \hat{x}_{12} = \hat{\phi}^2 x_{10} = 0.3943^2 \cdot (-0.2782) = -0.0433$$

$$x_{10}(10) = \hat{x}_{20} = \hat{\phi}^{10} x_{10} = 0.3943^{10} \cdot (-0.2782) \approx -0.000024$$

$$x_{10}(90) = \hat{x}_{100} = \hat{\phi}^{90} x_{10} = 0.3943^{90} \cdot (-0.2782) \approx 0 \quad \text{come deve essere.}$$

Domanda 3

Si dica, giustificando la risposta, se il processo

$$(1 - 0.5B)(1 - 0.7B)(1 - 0.2B)Y_t = \epsilon_t$$

con $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$, è stazionario e invertibile e lo si riscriva utilizzando l'usuale rappresentazione $\phi(B)Y_t = \theta(B)\epsilon_t$.

Soluzione

Il processo è un AR(3) quindi certamente invertibile e anche stazionario dal momento che è evidente che tutte le radici di

$$(1 - 0.5B)(1 - 0.7B)(1 - 0.2B) = 0$$

hanno il modulo maggiore di 1.

Essendo

$$\begin{aligned}\Phi(B) &= (1 - 0.5B)(1 - 0.7B)(1 - 0.2B) \\ &= (1 - 0.7B - 0.5B + 0.35B^2)(1 - 0.2B) \\ &= (1 - 1.2B + 0.35B^2)(1 - 0.2B) \\ &= 1 - 1.4B + 0.35B^2 - 0.2B + 0.24B^2 - 0.07B^3 \\ &= 1 - 1.4B + 0.598B^2 - 0.07B^3\end{aligned}$$

Il processo può essere riscritto come

$$(1 - 1.4B + 0.598B^2 - 0.07B^3)Y_t = \epsilon_t \quad \text{con} \quad \epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$$

O, equivalentemente come

$$Y_t = 1.4Y_{t-1} - 0.598Y_{t-2} + 0.07Y_{t-3} + \epsilon_t$$

Domanda 4

Data una serie stagionale di osservazioni mensili, si assuma che l'effetto stagionale S_t sia costante, cioè $S_t = S_{t-12}\ \forall t$, che il trend T_t sia lineare e che Y_t sia un processo stazionario a media nulla. Si consideri il modello (misto) $X_t = T_t S_t + Y_t$.

1. Si applichi l'operatore $(1-B^{12})$ a X_t e si dica, giustificando la risposta, se il processo risultante $W_t = (1 - B^{12})X_t$ è stazionario in media.

2. In caso negativo, si proponga un opportuno operatore differenza che risolva il problema.

Soluzione (Es. n. 5.12 dell'Eserciziario):

1. Sviluppiamo anzitutto W_t:

$$W_t = (1 - B^{12})X_t = T_t S_t + Y_t - T_{t-12}S_{t-12} - Y_{t-12} = S_t(T_t - T_{t-12}) + Y_t - Y_{t-12}.$$

   Poiché $T_t = a + bt$, si ha $W_t = S_t(a + bt - a - bt + 12 \cdot b) + Y_t - Y_{t-12}$, ossia:

$$W_t = 12 \cdot bS_t + Y_t - Y_{t-12}.$$

   Pertanto, poiché $E(Y_t) = E(Y_{t-12}) = 0$, $E(W_t) = 12 \cdot bS_t$. La media di W_t dipende quindi da t, sicché W_t non è stazionario in media.

2. Applicando a W_t l'operatore differenza stagionale $(1 - B^{12})$ si ottiene:

$$(1 - B^{12})W_t = 12 \cdot bS_t - 12 \cdot bS_{t-12} + Y_t - Y_{t-12} - Y_{t-12} + Y_{t-24} = Y_t - 2Y_{t-12} + Y_{t-24},$$

   in quanto $S_t = S_{t-12}$. Stante la stazionarietà di Y_t, che ha media nulla, si ricava

$$E\left[(1 - B^{12})W_t\right] = 0$$

   e dunque questo processo è stazionario in media.

Domanda 5

Definire

1. il trend deterministico
2. il trend stocastico

e fornire un esempio di processo trend-stazionario ed uno di processo differenza-stazionario.

Soluzione:

vedi pagine 293 e seguenti del libro di testo.

- Trend deterministico: funzione deterministica del tempo, completamente prevedibile. Esempio di processo trend-stazionario (o stazionario attorno a un trend): $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \epsilon_t$

- Trend stocastico: varia nel tempo in maniera aleatoria e non (completamente) prevedibile. Esempio di processo differenza stazionario: $y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$ (Random Walk)

Domanda 6

Mostrare che per un processo AR(1) stazionario la varianza dell'errore di previsione converge alla varianza marginale del processo al divergere dell'orizzonte previsivo.

Soluzione:

Per un AR(1) del tipo $Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ la varianza marginale è data da:

$$Var(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}. \tag{1}$$

Invece, il generico errore di previsione a k passi per un AR(1) è dato da

$$\begin{aligned} e_{n+k} &= Y_{n+k} - \hat{Y}_{n+k} \\ &= \varepsilon_{n+k} + \phi\varepsilon_{n+k-1} + \phi^2\varepsilon_{n+k-2} + \ldots + \phi^{k-1}\varepsilon_{n+1} \end{aligned}$$

Da qui si ricava che, essendo il processo stazionario e quindi con $|\phi_1| < 1$, la varianza dell'errore è data da:

$$\begin{aligned} Var(e_{n+k}) &= \sigma_\varepsilon^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + \ldots + \phi^{2(k-1)}) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \frac{1-\phi^{2k}}{1-\phi^2} \end{aligned}$$

Per $k \to \infty$ si ha poi

$$Var(e_{n+k}) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} = Var(Y_t) \tag{2}$$

Domanda 6

Soluzione: