SERIE STORICHE

Padova, 24 luglio 2024

Nome Cognome N. matricola

Corso di Laurea

Domanda 1

Si considerino i seguenti modelli e si stabilisca, giustificando la risposta, sotto quali condizioni ciascuno di essi è (debolmente) stazionario.

1. $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$
2. $X_t = a + \theta\varepsilon_0$
3. $X_t = \varepsilon_0 \cos(at)$

In tutti i casi si assume che $\varepsilon_t \sim IID\mathcal{N}(0,1)$ e a e θ sono parametri arbitrari.

Soluzione:

1. Il processo è un MA(1), quindi è sempre stazionario. Inoltre, se il coefficiente a media mobile θ è in modulo minore di uno, il processo è anche invertibile.
2. Abbiamo:
$$E[X_t] = E[a + \theta\varepsilon_0] = a + \theta E[\varepsilon_0] = a \ \ \forall t$$
$$Var(X_t) = Var(a + \theta\varepsilon_0) = Var(\theta\varepsilon_0) = \theta^2 \ \ \forall t$$
$$Cov(X_t, X_{t-k}) = E[(a + \theta\varepsilon_0 - a)(a + \theta\varepsilon_0 - a)] = E[\theta^2\varepsilon_0^2] = \theta^2 Var(\varepsilon_0) = \theta^2 \ \ \forall k$$
Pertanto il processo è stazionario.
3. Abbiamo:
$$E[X_t] = E[\varepsilon_0 \cos(at)] = \cos(at)E[\varepsilon_0] = 0 \ \ \forall t$$
$$Var(X_t) = Var(\varepsilon_0 \cos(at)) = \cos(at)^2 Var(\varepsilon_0) = \cos(at)^2$$
Pertanto, a parte il caso $a = 0$, in cui $\cos 0 = 1$ e $Var(X_t) = 1$, in tutti gli altri casi la varianza varia al variare del tempo, per cui il processo non è stazionario.

Domanda 2

Dato un modello SARIMA(1,0,0)$\times$(0,1,1)$_4$, calcolare la previsione con orizzonte temporale $k = 5$ sapendo che:

- il parametro AR ϕ_1 è pari a -0,8;
- l'ultimo valore osservato della serie storica è $y_n = 3$;
- $\hat{y}_{n+1|n} = -2$ e $\hat{y}_{n+4|n} = 1$.

Soluzione (Es. n. 7.5 dell'Eserciziario): Il processo indicato si esprime nella forma:

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B^4)Y_t = (1 - \Theta_1 B^4)\varepsilon_t.$$

Poiché

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B^4) = 1 - \phi_1 B - B^4 + \phi_1 B^5,$$

il processo può essere riscritto nel modo seguente:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + Y_{t-4} - \phi_1 Y_{t-5} + \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-4}.$$

Il previsore di Y_{n+5} è dunque pari a:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{n+5|n} &= E_n[Y_{n+5}] \\ &= \phi_1 E_n[Y_{n+4}] + E_n[Y_{n+1}] - \phi_1 E_n[Y_n] + \\ &\quad + E_n[\varepsilon_{n+5}] - \Theta_1 E_n[\varepsilon_{n+1}]. \end{aligned}$$

Il calcolo dei valori attesi condizionati avviene secondo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} E_n[Y_{n+j}] &= \begin{cases} y_{n+j} & j \leq 0 \\ \hat{y}_{n+j|n} & j > 0 \end{cases} \\ E_n[\varepsilon_{n+j}] &= \begin{cases} e_{n+j} & j \leq 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Pertanto, la previsione $\hat{y}_{n+5|n}$ è pari a

$$\hat{y}_{n+5|n} = \phi_1 \hat{y}_{n+4|n} + \hat{y}_{n+1|n} - \phi_1 y_n.$$

Sostituendo i valori noti nella precedente espressione otteniamo il risultato richiesto:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{n+5|n} &= -0,8 - 2 - (-0,8) \cdot 3 \\ &= -0,8 - 2 + 2,4 = -0,4. \end{aligned}$$

Domanda 3

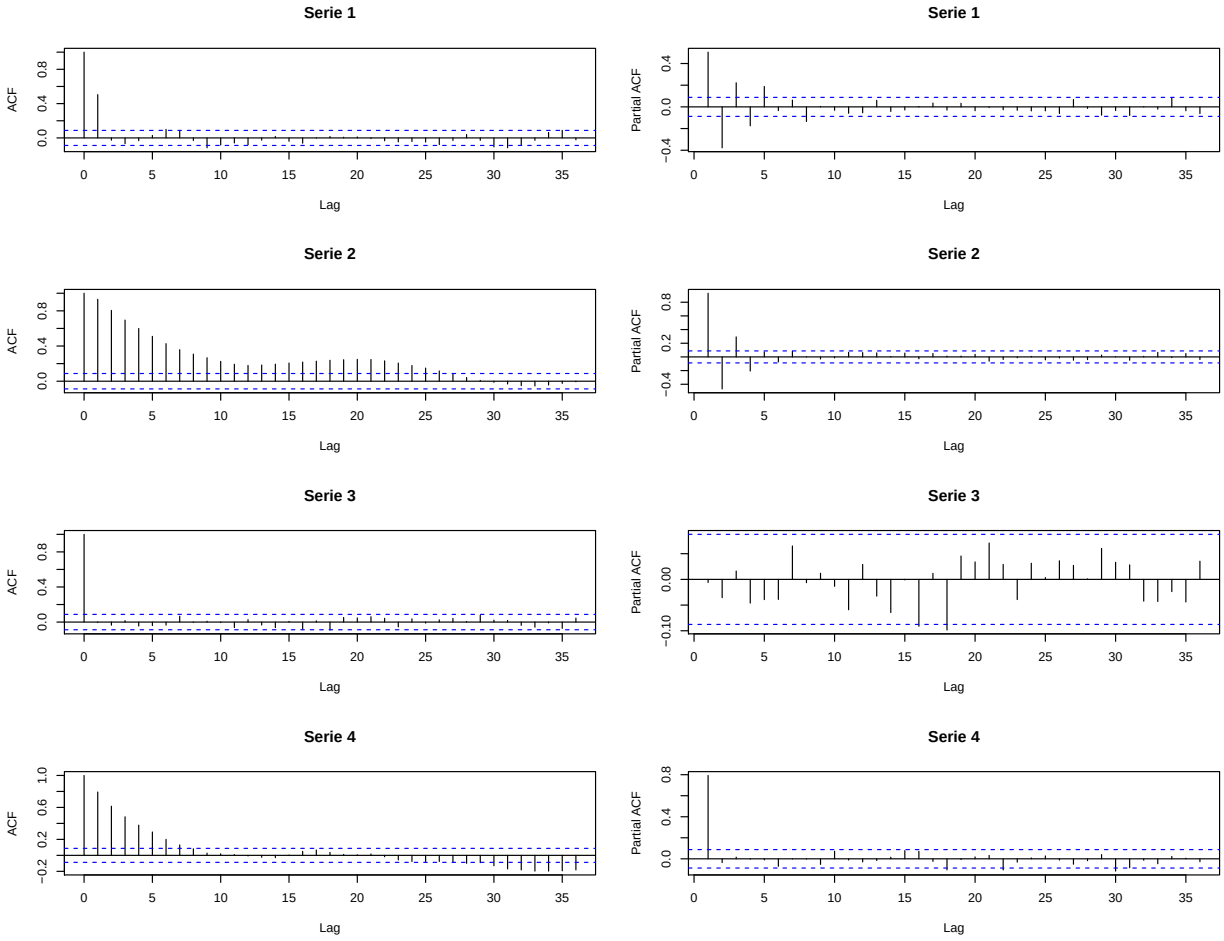
Assegnare, **giustificando la risposta**, le funzioni di autocorrelazione riportate in figura ai seguenti processi:

(a) $X_t = \varepsilon_t$

(b) $X_t = 0,9X_{t-1} + \varepsilon_t$

(c) $X_t = \varepsilon_t + 0,8\varepsilon_{t-1}$

(d) $X_t = 0,9X_{t-1} + \varepsilon_t + 0,8\varepsilon_{t-1}$



Soluzione:

(a) Il primo processo è un WN, quindi gli corrispondono le funzioni di autocorrelazione della serie 3, infatti tutti i coefficienti di autocorrelazione globale e parziale risultano interni alle bande di confidenza e quindi non significativamente diversi da zero.

(b) Il processo 2 è un processo AR(1), pertanto mi aspetto che la funzione di autocorrelazione globale decada a zero velocemente e vi sia un unico ritardo significativo, il primo, nella funzione di autocorrelazione globale. Questo comportamento lo ritrovo nelle funzioni di autocorrelazione della serie 4.

(c) Il processo 3 è un processo MA(1) cui associo le funzioni di autocorrelazione della serie 1. Infatti, per tale serie solo il roimo coefficiente della funzione di autocorrelazione globale è significativo, mentre la funzione di autocorrelazione parziale va a zero dopo un po' di ritardi.

(d) Il processo 4 è un processo ARMA(1,1). A questo processo rimangono associate le funzioni di autocorrelazione della serie 2 che, infatti, decrescono entrambe a zero.

Domanda 4

Si dispone di una serie storica giornaliera che presenta una componente stagionale costante di periodo 7.

1. Stabilire se una media mobile aritmetica semplice a 7 termini elimina tale stagionalità.
2. Derivare l'associato rapporto di riduzione della varianza
3. Mostrare che la media mobile al punto 1. conserva trend polinomiali di primo grado ma non quelli di secondo grado.

Soluzione (Es. n. 3.2 dell'Eserciziario):

1. Sì, è una proprietà fondamentale della media mobile aritmetica: elimina componenti stagionali (costanti) di periodo *pari* al suo ordine. Si noti che in questo caso essendo il periodo della stagionalità dispari non c'è alcun bisogno di ricorrere alla centratura della media mobile.
2. Il rapporto di riduzione della varianza di una media mobile aritmetica è pari al reciproco del suo ordine. In questo caso risulta pari a 1/7.
3. La somma dei coefficienti della media mobile è pari ad 1. Si tratta inoltre di una media mobile simmetrica. Ne segue che conserva i trend lineari. Il fatto che la somma

$$\sum_{i=-3}^{3} i^2 \vartheta_i$$

risulti diversa da 0 comporta che la media mobile in questione *non* conservi trend parabolici.

Domanda 5

Definire quando un processo è invertibile e spiegare perché questa proprietà è importante nell'identificazione di un modello della classe ARMA.

Soluzione:

a. Un processo Y_t è invertibile se può essere scritto come una funzione del suo pasato e di un WN, ovvero se si può scrivere

$$Y_t = h(Y_{t-1}, Y_{t-1}, ...) + \varepsilon_t. \tag{1}$$

b. La sua rilevanza nell'ambito della modellistica ARMA risiede nel fatto che solo per modelli stazionari e invertibili è possibile identificare univocamente il processo generatore dei dati a partire dalla funzione di autocorrelazione.

Domanda 6

1.Spiegare in cosa si differenziano:

- i coefficienti stagionali specifici;
- i coefficienti stagionali grezzi;
- i coefficienti stagionali ideali.

2. Si immagini di avere un modello per dati trimestrali di questo tipo:

$$Y_t = \beta_1 d_{1,t} + \beta_2 d_{2,t} + \beta_3 d_{3,t} + \beta_4 d_{4,t} + \varepsilon_t. \tag{2}$$

dove $d_{i,t}$ è una variabile dummy che vale 1 se Y_t si riferisce all'$i-$esimo trimestre e zero altrimenti, e ε_t $N(0, \sigma^2)$.
Per rappresentare il valore del fenomeno stimato al tempo t con il modello, bisogna usare i coefficienti grezzi o quelli ideali? Giustificare la risposta.

Soluzione:
1.

- I coefficienti stagionali specifici (CSS_t) contengono sia la componente stagionale grezza che un termine di errore specifico dell'istante t. Dunque, in generale, se S è il periodo, si avrà che $CSS_t \neq CSS_{t+S}$.
- I coefficienti stagionali grezzi (CSG_t) non contengono più il termine d'errore specifico e dunque $CSS_t = CSS_{t+S}$. Tuttavia la loro media non è ancora necessariamente nulla.
- I coefficienti stagionali ideali (CSI_t) non contengono più il termine d'errore, per cui $CSI_t = CSI_{t+S}$, ed inoltre hanno media nulla.

2. E' lo stesso: se $\hat{\beta}_i$ sono i coefficienti grezzi stimati e β_i^* sono i coefficienti ideali, se ad esempio Y_t si riferisce al il trimestre $i-$esimo, si potrà scrivere indifferentemente:

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_i$$

oppure

$$\hat{Y}_t = \bar{\beta} + \beta_i^*$$

con $\bar{\beta}$ media dei coefficienti grezzi.