SERIE STORICHE

Padova, 14 febbraio 2024

Nome Cognome N. matricola

Corso di Laurea

Domanda 1 Si consideri il processo definito da:

$$X_t = 0{,}5\varepsilon_{t+1} + 0{,}5\varepsilon_{t-1}$$

con $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, se ne determini la funzione di autocovarianza e di autocorrelazione e si dica, giustificando la risposta, se è o meno stazionario..

Soluzione: Il processo è stazionario essendo un processo (seppur particolare) a media mobile, inoltre si ha $E[X_t] = 0$. Pertanto:

$$\gamma_0 = Var(X_t) = Var(0{,}5\varepsilon_{t+1} + 0{,}5\varepsilon_{t-1}) = 0{,}5^2 Var(\varepsilon_{t+1}) + 0{,}5^2 Var(\varepsilon_{t-1}) = 0{,}5\sigma^2$$

Inoltre:

$$\gamma_1 = Cov(X_t, X_{t-1}) = E[(0{,}5\varepsilon_{t+1} + 0{,}5\varepsilon_{t-1})(0{,}5\varepsilon_t + 0{,}5\varepsilon_{t-2})] = 0$$

$$\gamma_2 = Cov(X_t, X_{t-2}) = E[(0{,}5\varepsilon_{t+1} + 0{,}5\varepsilon_{t-1})(0{,}5\varepsilon_{t-1} + 0{,}5\varepsilon_{t-3})] = 0{,}5^2 E[\varepsilon_{t-1}^2] = 0{,}25\sigma^2$$

e $\gamma_k = 0$ per $k \geq 3$. Pertanto la funzione di autocorrelazione è:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = \pm 1, \pm 3, \ldots \\ 0{,}5 & k = \pm 2 \end{cases}$$

Domanda 2 Si considerino i due processi $Y_t \sim SARIMA(0,1,1)(0,1,1)_3$ e $X_t \sim SARIMA(1,0,2)(1,0,0)_3$.

1. Si consideri il processo Y_t e lo si riscriva in forma estesa.
2. Si dica, giustificando la risposta, se Y_t è stazionario.
3. Si considerino le seguenti trasformazioni del processo Y_t :
   (a) $V_t = (1-B)Y_t$
   (b) $W_t = (1-B^3)Y_t$
   (c) $Z_t = (1-B)(1-B^3)Y_t$

   Si dica, per ognuna di esse e giustificando la risposta, se sono stazionarie e a che processo della classe SARIMA appartengono.
4. Si consideri il processo X_t e lo si riscriva in forma $ARMA(p,q)$ specificando gli ordini p e q.

Soluzione:

1. Il processo può essere riscritto come:
$$(1-B)(1-B^3)Y_t = (1-\theta B)(1-\Theta B^3)\varepsilon_t$$
ossia:
$$(1-B-B^3+B^4)Y_t = (1-\theta B-\Theta B^3+\theta\Theta B^4)\varepsilon$$
da cui
$$Y_t = Y_{t-1}+Y_{t-3}-Y_{t-4}+\varepsilon_t-\theta\varepsilon_{t-1}-\Theta\varepsilon_{t-3}+\theta\Theta\varepsilon_{t-4}$$
2. Il processo è evidentemente NON stazionario avendo più radici unitarie.
3. Abbiamo:
   (a) $V_t \sim SARIMA(0,0,1)(0,1,1)_3$ NON stazionario in quanto possiede radici unitarie.
   (b) $W_t \sim SARIMA(0,1,1)(0,0,1)_3$ NON stazionario in quanto possiede una radice unitarie.
   (c) $Z_t \sim SARIMA(0,0,1)(0,0,1)_3$ stazionario in quanto non possiede radici unitarie.
4. Il processo X_t può riscriversi come:
$$(1-\phi B)(1-\Phi B^3)X_t = (1-\theta_1 B-\theta_2 B^2)\varepsilon_t$$
ossia
$$(1-\phi B-\Phi B^3+\phi\Phi B^4)X_t = (1-\theta_1 B-\theta_2 B^2)\varepsilon_t$$
da cui
$$X_t = \phi X_{t-1}+\Phi X_{t-3}-\phi\Phi X_{t-4}+\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}$$
che è un ARMA(4,2).

Domanda 3

Per la serie storica trimestrale $\{y_t\}_{t=1}^{21}$, osservata nel periodo 1997.2-2002.2 è stato stimato il seguente modello:

$$y_t = 5d_{1t} - 3,5d_{2t} + 2d_{3t} + 6d_{4t} + 0,8t + 0,02t^2 + \varepsilon_t, \;\; \varepsilon_t \sim WN(0,4)$$

dove d_{1t}, d_{2t}, d_{3t} e d_{4t} sono variabili *dummy* relative ai quattro trimestri.

i) Avendo osservato i i valori $y_1 = 5,5$, $y_2 = 2,8$, $y_3 = 13$, $y_4 = 21,5$, fornire i corrispondenti valori destagionalizzati.

ii) riscrivere il modello inserendo la costante tra i regressori.

Soluzione:

i) La serie destagionalizzata va calcolata in utilizzando i coefficienti ideali di stagionalità. I coefficienti riportati, γ_j^*, $j = 1, \ldots, 4$, sono invece coefficienti grezzi perché

$$\sum_{j=1}^{4} \gamma_j^* = 9.5 \neq 0.$$

Per ottenere i coefficienti ideali bisogna dunque sottrarre ai coefficienti grezzi la loro media

$$\bar{\gamma}^* = \frac{9,5}{4} = 2,375$$

I coefficienti ideali sono dunque

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_1 &= \gamma_1^* - \bar{\gamma}^* = 5 - 2,375 = 2,625 \\
\hat{\gamma}_2 &= \gamma_2^* - \bar{\gamma}^* = -3,5 - 2,375 = -5,875 \\
\hat{\gamma}_3 &= \gamma_3^* - \bar{\gamma}^* = 2 - 2,375 = -0,375 \\
\hat{\gamma}_4 &= \gamma_4^* - \bar{\gamma}^* = 6 - 2,375 = 3,625.
\end{aligned}$$

Con questi coefficienti è possibile derivare i valori destagionalizzati richiesti:

$$\begin{aligned}
t = 1: &\quad \hat{y}_1^d = 5,5 - (-5,875) = 11,375 \\
t = 2: &\quad \hat{y}_2^d = 2,8 - (-0,375) = 3,175 \\
t = 3: &\quad \hat{y}_3^d = 13 - 3,625 = 9,375 \\
t = 4: &\quad \hat{y}_4^d = 21,5 - 2,625 = 18,875.
\end{aligned}$$

ii) Per riscrivere il modello di regressione con la costante dobbiamo eliminare una variabile *dummy*, ad esempio la prima (d_{1t}). Il modello assume poi la seguente forma:

$$y_t = 5 - 8,5d_{2t} - 3d_{3t} + d_{4t} + 0,8t + 0,02t^2 + \varepsilon_t.$$

In questo caso la costante $\tilde{\gamma}_0 = 5$ rappresenta l'effetto stagionale (grezzo) relativo al primo trimestre, mentre i coefficienti $\tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$ e $\tilde{\gamma}_4$, relativi a d_{2t}, d_{3t} e d_{4t}, rispettivamente, sono gli effetti stagionali differenziali rispetto al primo trimestre, ovvero

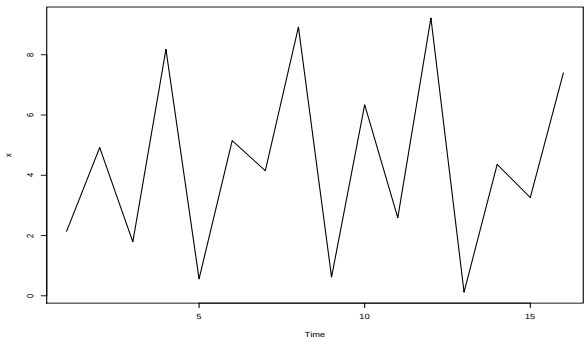
$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma_0} &= \gamma_1^* = 5 \\
\tilde{\gamma}_2 &= \gamma_2^* - \gamma_1^* = -3,5 - 5 = -8,5 \\
\tilde{\gamma}_3 &= \gamma_3^* - \gamma_1^* = 2 - 5 = -3 \\
\tilde{\gamma}_4 &= \gamma_4^* - \gamma_1^* = 6 - 5 = 1.
\end{aligned}$$

Domanda 4

Si consideri serie storica trimestrale:

$x = (2,14 \;\; 4,92 \;\; 1,79 \;\; 8,18 \;\; 0,56 \;\; 5,15 \;\; 4,15 \;\; 8,92 \;\; 0,62 \;\; 6,34 \;\; 2,59 \;\; 9,22 \;\; 0,12 \;\; 4,36 \;\; 3,26 \;\; 7,40)$

il cui grafico è riportato nella figura sottostante:



1. Si calcolino i primi 4 valori della media mobile aritmetica di ordine 4, x^*.
2. Si calcolino i primi quattro valori della media mobile $x^{**} = \left\{[5]; \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \mathbf{\frac{2}{8}}\right\}$
3. Si dica quale media mobile può essere utilizzata per destagionalizzare la serie data.

Soluzione:

1. Si ha:
$$x^*_{2,3} = \frac{2,14 + 4,92 + 1,79 + 8,18}{4} = 4,2575$$
$$x^*_{3,4} = \frac{4,92 + 1,79 + 8,18 + 0,56}{4} = 3,8625$$
$$x^*_{4,5} = \frac{1,79 + 8,18 + 0,56 + 5,15}{4} = 3,92$$
$$x^*_{5,6} = \frac{8,18 + 0,56 + 5,15 + 4,15}{4} = 4,51$$
2. Si ha:
$$x^{**}_3 = \frac{2,14 + 2 * 4,92 + 2 * 1,79 + 2 * 8,18 + 0,56}{8} = 4,06$$
$$x^{**}_4 = \frac{4,92 + 2 * 1,79 + 2 * 8,18 + 2 * 0,56 + 5,15}{8} = 3,89$$
$$x^{**}_5 = \frac{1,79 + 2 * 8,18 + 2 * 0,56 + 2 * 5,15 + 4,15}{8} = 4,215$$
$$x^{**}_6 = \frac{8,18 + 2 * 0,56 + 2 * 5,15 + 2 * 4,15 + 8,92}{8} = 4,6025$$
3. Entrambe le medie mobili possono essere utilizzate per destagionalizzare la serie data, la prima perché è una media semplice di ordine pari al periodo, la seconda perché centratura di una media mobile semplice a 4 termini.

Domanda 5

i) Definire i concetti di stazionarietà forte e stazionarietà debole specificando anche le condizioni che devono essere soddisfatte nei due casi.
ii) Spiegare come si verifica se un modello ARIMA è stazionario in senso debole.
iii) Spiegare come si verifica se una serie storica è stazionaria in senso debole.

Soluzione:
i) Un processo stocastico viene detto stazionario in senso stretto se

$$F(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}) = F(Y_{t_1+\tau}, Y_{t_2+\tau}, \ldots, Y_{t_n+\tau})$$

$$\forall (t_1, t_2, \ldots, t_n),\ \forall \tau \text{ e } \forall n$$

Ciò implica che tutte le relazioni probabilistiche tra le componenti del processo rimangono invariate rispetto a traslazioni temporali.

Un processo stocastico viene detto stazionario in senso debole se:

$$E(Y_t) = \mu\ \forall t$$
$$V(Y_t) = \sigma^2\ \forall t$$
$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = \gamma(k)\ \forall t, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ii) Per stabilire se un modello ARIMA è stazionario in senso debole bisogna considerare le radici dell'equazione caratteristica $\phi(B) = 0$, con $\phi(b)$ polinomio autoregressivo, e verificare che le sue radici siano tutte in modulo maggiori di 1.
iii) Per stabilire se una serie storica è stazionaria bisogna considerare la sua funzione di autocorrelazione e verificare che decada a zero in modo sufficientemente veloce, idealmente a velocità esponenziale.

Domanda 6

Nel contesto della stima del trend mediante funzioni polinomiali, indicare i metodi di identificazione dell'ordine del polinomio da considerare.

Soluzione:

Per individuare il corretto ordine di un trend polinomiale si possono utilizzare (anche congiuntamente) i seguenti metodi:

i) il criterio delle differenze successive (pag.42-43 del libro di testo): spiegare come funziona

ii) l'esame della significatività dei parametri stimati: spiegare come funzione

iii) il confronto tra $\bar{R}^2$ (pag.43-44 del libro di testo) : spiegare come funziona