SERIE STORICHE

Padova, 11 settembre 2023

Nome Cognome N. matricola

Corso di Laurea

Domanda 1 Si considerino le due medie mobili

$$M_1 = -y_{t-2} + \frac{1}{2}y_{t-1} + \frac{2}{3}y_t + \frac{1}{2}y_{t+1} + \frac{1}{3}y_{t+2}$$
$$M_2 = \frac{1}{6}y_{t-1} + \frac{2}{3}y_t + \frac{1}{6}y_{t+1}$$

e si supponga di volerle applicare (i) ad una serie storica incorrelata al fine di ridurne la variabilità e (ii) ad una serie storica generata da un modello con trend evolutivo e componente erratica, al fine di stimarne il trend.

1. Quale delle due medie mobili sarebbe preferibile e perché?
2. Ci sono motivi per ritenere che una delle due medie mobili non debba essere utilizzata?

Soluzione

1. La riduzione di variabilità di una serie a seguito dell'applicazione di una media mobile si misura con il rapporto di riduzione della varianza residua. Per M_1 tale quantità risulta pari a 2,056 (cioè questa media mobile produce una serie storica la cui componente accidentale ha una variabilità che è oltre due volte superiore a quella della serie originale), mentre per M_2 è pari a 0,5. È chiaro quindi che la media mobile da preferire è M_2.
   Anche per il caso (ii) la media M_2 risulta più appropriata. Per essa infatti valgono le condizioni $\sum_{i=-m}^{m} \vartheta_i = 1$ e $\sum_{i=-m}^{m} i\vartheta_i = 0$, mentre per M_1 si ha

$$\sum_{i=-2}^{2} i\vartheta_i = \frac{12 - 3 + 0 + 3 + 4}{6} = \frac{8}{3} \neq 0.$$

   Ne consegue che l'applicazione di M_1 non lascerebbe inalterato un trend di tipo lineare.
2. Entrambe le medie mobili sono centrate, mentre solo M_2 è simmetrica. La proprietà di simmetria dei coefficienti è fondamentale per ottenere i risultati desiderabili dall'applicazione di una media mobile, ovvero la riduzione della componente d'errore, la conservazione del trend o la depurazione della componente stagionale. L'utilizzo della media mobile M_1 è quindi sconsigliabile.

Domanda 2 Sia $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ e si definisca il processo Y_t come segue:

$$Y_t = \begin{cases} 0,5\epsilon_t + \epsilon_{t-1} & \text{per } t \text{ pari} \\ 3 + 0,5\epsilon_t + \epsilon_{t-1} & \text{per } t \text{ dispari} \end{cases} \tag{1}$$

1. Si calcolino valore atteso, varianza e funzione di autocovarianza per il processo Y_t.
2. Si dica, giustificando la risposta, se Y_t è stazionario.

Soluzione:

1. Si ha:

$$E[Y_t] = \begin{cases} E[0,5\epsilon_t + \epsilon_{t-1}] = 0 & \text{per } t \text{ pari} \\ E[3 + \epsilon_t + \epsilon_{t-1}] = 3 & \text{per } t \text{ dispari} \end{cases}$$

$$Var[Y_t] = \begin{cases} Var[0,5\epsilon_t + \epsilon_t] = 0,5^2 Var(\epsilon_t) + Var(\epsilon_{t-1}) = 1,25\sigma^2 & \text{per } t \text{ pari} \\ Var[3 + \epsilon_t + \epsilon_t] = 0,5^2 Var(\epsilon_t) + Var(\epsilon_{t-1}) = 1,25\sigma^2 & \text{per } t \text{ dispari} \end{cases}$$

   Inoltre, se t è pari, allora $t \pm 1$ è dispari, per cui:

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = E[Y_t(Y_{t-1} - 3)] = E[(0,5\epsilon_t + \epsilon_{t-1})(0,5\epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2})] = 0,5\sigma^2$$

   e, analogamente:

$$Cov(Y_t, Y_{t+1}) = E[Y_t(Y_{t+1} - 3)] = E[(0,5\epsilon_t + \epsilon_{t-1})(0,5\epsilon_{t+1} + \epsilon_t)] = 0,5\sigma^2.$$

   Se t è dispari, allora $t \pm 1$ è pari, per cui:

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = E[(Y_t - 3)Y_{t-1}] = E[(0,5\epsilon_t + \epsilon_{t-1})(0,5\epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2})] = 0,5\sigma^2$$

   e, analogamente:

$$Cov(Y_t, Y_{t+1}) = 0,5\sigma^2.$$

   Che t sia pari o dispari si ha che $Cov(Y_t, Y_{t\pm k}) = 0$ per $k \geq 2$.
2. Poiché il valore atteso di Y_t varia al variare di t il processo non è stazionario.

Domanda 3 Dato il processo $Y_t = \phi Y_{t-2} + \epsilon_t$ con $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2_\epsilon)$

1. Si dica per quali valori di ϕ il processo è stazionario.
2. Si calcoli la $Var(Y_t)$.

Soluzione:

1. Il processo è stazionario se le radici dell'equazione $(1 - \phi B^2) = 0$ sono in modulo maggiori di uno. Tali radici sono $B_{1,2} = \pm\sqrt{1/\phi}$. Quindi deve essere $\mid \pm\sqrt{1/\phi} \mid > 1$ da cui segue che deve essere $-1 < \phi < 1$.
2. $Var(Y_t) = Var(\phi Y_{t-2} + \epsilon_t) = \phi^2 Var(Y_{t-2}) + Var(\epsilon_t)$
   In ipotesi di stazionarietà $Var(Y_t) = Var(Y_{t-2})$ quindi:
   $Var(Y_t) = \frac{\sigma^2_\epsilon}{1-\phi^2}$.
   (Si noti che per la positività della varianza deve essere $-1 < \phi < 1$)

Domanda 4 Alla serie delle vendite di un certo prodotto è stato adattato il seguente modello:

$$(1 - 1{,}4B + 0{,}4B^2)(1 - B)y_t = \varepsilon_t$$

dove $\hat{\sigma}^2_\varepsilon = 58.000$ e le ultime tre osservazioni sono $y_{198} = 640$, $y_{199} = 770$ e $y_{200} = 800$.

1. Che tipo di modello è stato adattato alla serie in questione?
2. Si calcolino le previsioni per $t = 201, 202$ e 203.

Soluzione:

1. Il modello sembra essere un $ARIMA(2, 1, 0)$. In realtà, calcolando le radici dell'equazione $1 - 1{,}4B + 0{,}4B^2 = 0$ troviamo $B_1 = 5/2$ e $B_2 = 1$ e quindi il modello è un $ARIMA(1, 2, 0)$, ossia un modello non stazionario, e precisamente $(1 - 0{,}4B)(1 - B)^2 y_t = \varepsilon_t$.
2. Moltiplicando i due polinomi autoregressivi, possiamo riscrivere il modello come:

   $$y_t - 2{,}4y_{t-1} + 1{,}8y_{t-2} - 0{,}4y_{t-3} = \varepsilon_t$$

   da cui:

   $$y_t = 2{,}4y_{t-1} - 1{,}8y_{t-2} + 0{,}4y_{t-3} + \varepsilon_t.$$

   Le previsioni richieste, usando le regole del valore atteso condizionato, si ottengono nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{201} = \hat{y}_{200}(1) &= E[Y_{201} \mid I_{200}] = E_{200}[Y_{201}] = \\
&= 2{,}4E_{200}[Y_{200}] - 1{,}8E_{200}[Y_{199}] + 0{,}4E_{200}[Y_{198}] + E_{200}[\varepsilon_{201}] = \\
&= 2{,}4 \cdot 800 - 1{,}8 \cdot 770 + 0{,}4 \cdot 640 = 790
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{202} = \hat{y}_{200}(2) &= E[Y_{202} \mid I_{200}] = E_{200}[Y_{202}] = \\
&= 2{,}4E_{200}[Y_{201}] - 1{,}8E_{200}[Y_{200}] + 0{,}4E_{200}[Y_{199}] + E_{200}[\varepsilon_{202}] = \\
&= 2{,}4 \cdot 790 - 1{,}8 \cdot 800 + 0{,}4 \cdot 770 = 764
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{203} = \hat{y}_{200}(3) &= E[Y_{203} \mid I_{200}] = E_{200}[Y_{203}] = \\
&= 2{,}4E_{200}[Y_{202}] - 1{,}8E_{200}[Y_{201}] + 0{,}4E_{200}[Y_{200}] + E_{200}[\varepsilon_{203}] = \\
&= 2{,}4 \cdot 764 - 1{,}8 \cdot 790 - 0{,}7 \cdot 800 = 731{,}6
\end{aligned}$$

Domanda 5

Discutere brevemente i vari procedimenti di stima delle componenti stagionali nell'approccio classico e nell'approccio moderno.

Soluzione Accennare brevemente a:

1. Stima mediante trend polinomiale
2. Stima mediante medie mobili
3. Stima mediante modelli SARIMA

Domanda 6

Si descriva la procedura di Box-Jenkins nel caso di modelli ARIMA stagionali (SARIMA).

Soluzione:

E' la procedura di Box-Jenkins standard ma con particolare attenzione ai ritardi stagionali, sia nella fase di valutazione della stazionarietà che in quelle di identificazione del processo e di diagnostica (p.228-230 del libro di testo)