SERIE STORICHE

Padova, 17 luglio 2023

Nome Cognome N. matricola

Corso di Laurea

Domanda 1

Si considerino due processi X_t e Y_t, indipendenti, a media nulla e con funzione di autocovarianza teorica al ritardo k pari a

$$\gamma_k^x \neq 0 \text{ per } k = 0, 1, 2, \quad \gamma_k^x = 0 \text{ per } k > 2$$
$$\gamma_k^y \neq 0 \text{ per } k = 0, 1, 2, 3, \quad \gamma_k^y = 0 \text{ per } k > 3.$$

Derivare la funzione di autocorrelazione teorica per il processo $Z_t = X_t + 2\dot{Y}_t$ in funzione di γ_k^x e γ_k^y.

Soluzione:

(esercizio 5.2 dell'eserciziario)

Poiché $E(Z_t) = E(X_t) + 2E(Y_t) = 0$, la funzione di autocovarianza del processo Z_t è data da

$$\begin{aligned} \gamma_k^z &= E(Z_t Z_{t-k}) = E[(X_t + 2Y_t)(X_{t-k} + 2Y_{t-k})] = \\ &= E(X_t X_{t-k}) + 4E(Y_t Y_{t-k}) + 2E(X_t Y_{t-k}) + 2E(X_{t-k} Y_t) \end{aligned}$$

che, per l'indipendenza tra i due processi X_t e Y_t si semplifica in l'autocovarianza di Z_t si semplifica in

$$\gamma_k^z = E(X_t X_{t-k}) + 4E(Y_t Y_{t-k}) = \gamma_k^x + 4\gamma_k^y \tag{1}$$

Tenendo conto del comportamento di γ_k^x e γ_k^y si ha

$$\gamma_k^z = \begin{cases} \gamma_k^x + 4\gamma_k^y & \text{per} k = 0, 1, 2 \\ b^2\gamma_3^y & \text{per} k = 3 \\ 0 & \text{per} k > 3. \end{cases}$$

La funzione di autocorrelazione ρ_k^z si ottiene nel modo usuale, rapportando l'autocovarianza γ_k^z a γ_0^z. Pertanto si ha

$$\rho_k^z = \begin{cases} 1 & \text{per } k = 0 \\ \dfrac{\gamma_k^x + b^2\gamma_k^y}{\gamma_0^x + 4\gamma_0^y} & \text{per} k = 1, 2 \\ \dfrac{b^2\gamma_3^y}{\gamma_0^x + 4\gamma_0^y} & \text{per} k = 3 \\ 0 & \text{per} k > 3. \end{cases}$$

Domanda 2 Si verifichi la stazionarietà del processo

$$Y_t = t^{\alpha}(1 - \theta B)\epsilon_t$$

con $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, $\quad \mid \theta \mid < 1, \quad \alpha > 0$.

Soluzione: (ES. 6.5 Eserciziario)

Calcoliamo anzitutto la media del processo:

$$E(Y_t) = t^{\alpha} E(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}) = 0 \quad \forall\alpha.$$

La varianza è invece pari a

$$Var(Y_t) = t^{2\alpha} E[(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})^2] = t^{2\alpha}\sigma^2(1 + \theta^2).$$

Perché il processo sia (debolmente) stazionario, è necessario che la varianza non dipenda da t. Per $\alpha > 0$ ciò non accade, e dunque il processo è non stazionario.

Domanda 3

Si consideri la Tabella sottostante che riporta:

1. i valori della serie storica trimestrale, y_t, relativa al tasso di disoccupazione in Italia per il periodo 2012:I - 2016:IV,
2. i valori della serie y_t^{**}, ottenuti tramite la media mobile:

$$y_t = \frac{1}{8}(y_{t-2} + 2y_{t-1} + 2y_t + 2y_{t+1} + y_{t+2}),$$

3. i coefficienti specifici di stagionalità, CS_t.

Anno	**Trim**	y_t	y_t^{**}	CS_t
2012	I	10,8	-	
2012	II	10,5	-	
2012	III	9,8	10,9	-1,1
2012	IV	11,5	11,3	0,2
2013	I	12,7	11,7	1,0
2013	II	12,0	12,0	0,0
2013	III	11,3	12,3	-1,0
2013	IV	12,6	12,4	0,2
2014	I	13,5	12,4	1,1
2014	II	12,1	12,6	-0,5
2014	III	11,7	12,6	-0,9
2014	IV	13,2	12,5	0,7
2015	I	13,0	12,4	0,6
2015	II	12,1	12,1	0
2015	III	10,6	11,8	-1,2
2015	IV	11,9	11,6	0,3
2016	I	12,1	11,6	0,5
2016	II	11,6	11,6	0,0
2016	III	10,8	-	
2016	IV	12,2	-	

Si trovino i valori destagionalizzati della serie per l'anno 2016.

Soluzione:

1. Per prima cosa, dobbiamo trovare i coefficienti grezzi di stagionalità, prendendo la media dei coefficienti specifici relativi allo stesso trimestre di anni diversi, per cui:

$$\hat{S}^*_I = \frac{1+1,1+0,6+0,5}{4} = 0,8 \qquad \hat{S}^*_{II} = \frac{0-0,5+0+0}{4} = -0,125$$

$$\hat{S}^*_{III} = \frac{-1,1-1-0,9-1,2}{4} = -1,05 \qquad \hat{S}^*_{IV} = \frac{0,2+0,2+0,7+0,3}{4} = 0,35$$

2. Essendo

$$\hat{S}^*_I + \hat{S}^*_{II} + \hat{S}^*_{III} + \hat{S}^*_{IV} = -0,025 \neq 0$$

è necessario procedere al calcolo dei coefficienti ideali che si ottengono semplicemente sottraendo ai coefficienti grezzi la loro media ($-0,025/4 = -0,00625$), otteniamo quindi:

$$\hat{S}_I = 0,806 \qquad \hat{S}_{II} = -0,119 \qquad \hat{S}_{III} = -1,044 \qquad \hat{S}_{III} = 0,356.$$

I coefficienti ora sommano a zero e possiedono dunque i requisiti desiderati. Possiamo utilizzarli, quindi, per destagionalizzare la serie. In particolare, i valori destagionalizzati del 2016 sono:

$$y^d_{2016:I} = 12,1 - 0,806 = 11,294 \qquad y^d_{2016:II} = 11,6 + 0,119 = 11,719$$
$$y^d_{2016:III} = 10,8 + 1,044 = 11,844 \qquad y^d_{2016:IV} = 12,2 - 0,356 = 11,44.$$

Domanda 4 Dato un modello SARIMA$(0,0,1)\times(1,1,0)_4$, calcolare la previsione con orizzonte temporale $k = 8$ sapendo che:

- il parametro AR stagionale Φ_1 è pari a 0,3;
- l'ultimo valore osservato della serie storica è $y_n = 4$;
- $\hat{y}_{n+4|n} = 2$.

Soluzione: Esercizio n. 7.6 dell'Eserciziario.

Il processo ha la forma compatta

$$(1 - \Phi_1 B^4)(1 - B^4)Y_t = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t.$$

Il polinomio AR generalizzato è pari a

$$(1 - \Phi_1 B^4)(1 - B^4) = 1 - \Phi_1 B^4 - B^4 + \Phi_1 B^8.$$

Sfruttando questa espressione, il processo originario si trasforma in

$$Y_t = (1 + \Phi_1)Y_{t-4} - \Phi_1 Y_{t-8} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}.$$

Il previsore di Y_{n+8} è dunque pari a:

$$\hat{Y}_{n+8|n} = (1 + \Phi_1)E_n[Y_{n+4}] - \Phi_1 E_n[Y_n] + E_n[\varepsilon_{n+8}] - \theta_1 E_n[\varepsilon_{n+7}].$$

Pertanto, utilizzando le regole dei valori attesi condizionati, la previsione di Y_{n+8} secondo questo processo è

$$\begin{aligned} \hat{y}_{n+8|n} &= (1 + \Phi_1)\hat{y}_{n+4|n} - \Phi_1 y_n \\ &= 1,3 \cdot 2 - 0,3 \cdot 4 = 2,6 - 1,2 = 1,4. \end{aligned}$$

Domanda 5

Si definisca il concetto di invertibilità per un processo stocastico e si spieghi perché questa proprietà è importante nell'ambito dei processi stocastici.

Soluzione:

Un processo stocastico Y_t è invertibile se esiste una funzione lineare h tale che:

$$Y_t = h(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots) + \varepsilon_t \tag{2}$$

con $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, cioè se può essere scritto come funzione del suo passato e di un processo WN.

L'importanza di questa proprietà risiede nel fatto che he esistono più p.s. stazionari con la stessa funzione di autocovarianza ma uno solo è anche invertibile. Dunque l'invertibilità, insieme alla stazionarietà, assicurano che il processo sia univocamente identificabile a partire dalla funzione di autocovarianza.

Domanda 6

Mostrare che per un processo AR(1) stazionario la varianza dell'errore di previsione converge alla varianza marginale del processo al divergere dell'orizzonte previsivo.

Soluzione:

Per un AR(1) del tipo $Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ la varianza marginale è data da:

$$Var(Y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}. \tag{3}$$

Invece, il generico errore di previsione a k passi per un AR(1) è dato da

$$\begin{aligned} e_{n+k} &= Y_{n+k} - \hat{Y}_{n+k} \\ &= \varepsilon_{n+k} + \phi\varepsilon_{n+k-1} + \phi^2\varepsilon_{n+k-2} + \ldots + \phi^{k-1}\varepsilon_{n+1} \end{aligned}$$

Da qui si ricava che, essendo il processo stazionario e quindi con $|\phi_1| < 1$, la varianza dell'errore è data da:

$$\begin{aligned} Var(e_{n+k}) &= \sigma_\varepsilon^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + \ldots + \phi^{2(k-1)}) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \frac{1-\phi^{2k}}{1-\phi^2} \end{aligned}$$

Per $k \to \infty$ si ha poi

$$Var(e_{n+k}) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} = Var(Y_t) \tag{4}$$