SERIE STORICHE

Padova, 29 giugno 2023

Nome Cognome N. matricola

Corso di Laurea

Domanda 1 Dato il processo $Y_t = a + bt^2 + 0.4\epsilon_{t-1} + \epsilon_t$ con $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$, si consideri $X_t = (1-B)^2 Y_t$.

1. Si stabilisca a che classe di processi appartiene X_t.
2. Si dica, giustificando la risposta, se X_t è un processo stazionario.

Soluzione:

1. Risulta:

$$\begin{aligned} X_t &= (1-B)^2 Y_t = (1 - 2B + B^2) Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} = \\ &= a + bt^2 + 0.4\epsilon_{t-1} + \epsilon_t - 2(a + b(t-1)^2 + 0.4\epsilon_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + a + b(t-2)^2 + 0.4\epsilon_{t-3} + \epsilon_{t-2} = \\ &= 2b + 0.4\epsilon_{t-3} + 0.2\epsilon_{t-2} - 1.6\epsilon_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned}$$

   Quindi, $X_t \sim MA(3)$ con media pari a $E[X_t] = 2$.
2. X_t è certamente stazionario in quanto MA.

Domanda 2 Dati i due processi AR(2):

$$Y_t = 0.15Y_{t-1} + 0.85Y_{t-2} + \epsilon_t$$

$$X_t = 0.15X_{t-1} + 0.85X_{t-2} + \nu_t$$

con ϵ_t indipendente da ν_t, si consideri il processo $Z_t = Y_t + X_t$ risultante dalla somma dei due.

1. Dire, giustificando la risposta, che tipo di processo è Z_t
2. Dire, giustificando la risposta, se Z_t è stazionario

Soluzione:

1. Si ha:

$$\begin{aligned} Z_t &= 0.15Y_{t-1} + 0.85Y_t - 2 + \epsilon_t - 0.15X_{t-1} - 0.85X_{t-2} - \nu_t = \\ &= 0.15(Y_{t-1} - X_{t-1}) + 0.85(Y_{t-2} - X_{t-2}) + \epsilon_t - \nu_t = \\ &= 0.15Z_{t-1} + 0.85Z_{t-2} + \mu_t \end{aligned}$$

   dove $\mu_t = \epsilon_t - \nu_t$. Essendo:
   (a) $E[\mu_t] = 0 \qquad \forall t$
   (b) $Var(\mu_t) = Var(\epsilon_t - \nu_t) = \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\nu^2 \qquad \forall t$
   (c) $Cov(\mu_t, \mu_{t-h}) = E[\mu_t \mu_{t-h}] = E[(\epsilon_t - \nu_t)(\epsilon_{t-h} - \nu_{t-h})] = 0 \qquad \forall h \neq 0$
   allora $\mu_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\nu^2)$ e quindi Z_t è un $AR(2)$.
2. Per verificare se è stazionario dobbiamo calcolare le radici dell'equazione caratteristica:

$$1 - 0.15B - 0.85B^2 = 0$$

   che ha come soluzioni ($\Delta = 3.4225$) $B_1 = 1$ e $B_2 = -1.176471$.
   Essendo una delle radici esattamente pari a 1 il processo non è stazionario.

Domanda 3 Si consideri il processo AR(1), $X_t = 2 + 0,5X_{t-1} + \epsilon_t$ e $\epsilon_t \sim WN(0; 1{,}5)$.

Si consideri la media mobile semplice di ordine 3.

1. Si trovi il processo, X_t^*, che si ottiene applicando a X_t la media mobile considerata.
2. Si calcoli la varianza del processo ottenuto al punto precedente.
3. Commentare il risultato ottenuto.

Soluzione:

1. $X_t^* = \frac{1}{3}(X_{t-1} + X_t + X_{t+1})$
2. Essendo $X_t \sim AR(1)$ stazionario con costante $c = 2$, sappiamo che $E(X_t) = \dfrac{c}{1-\phi} = \dfrac{2}{0{,}5} = 4$, $Var(X_t) = \gamma_0 = \dfrac{\sigma^2}{1-\phi^2} = \dfrac{1{,}5}{0{,}75} = 2$ e $Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k = \phi^k \gamma_0 = 0{,}5^k \cdot 2$.
   Pertanto:

$$\begin{aligned} Var\left(\frac{X_{t-1} + X_t + X_{t+1}}{3}\right) &= \frac{1}{9}[Var(X_{t-1}) + Var(X_t) + Var(X_{t+1}) \\ &\quad +2Cov(X_{t-1}, X_t) + 2Cov(X_{t-1}, X_{t+1}) \\ &\quad +2Cov(X_t, X_{t+1})] \\ &= \frac{1}{9}(3\gamma_0 + 4\gamma_1 + 2\gamma_2) \\ &= \frac{1}{9}(3 \cdot 2 + 4 \cdot 0{,}5 \cdot 2 + 2 \cdot 0{,}5^2 \cdot 2) = 1{,}\bar{2}. \end{aligned}$$

3. La media mobile applicata riduce la varianza del processo originale, come era ovvio attendersi dal momento che il rapporto di riduzione della varianza residua è pari a $\dfrac{1}{3}$.

Domanda 4

Sia dato il processo

$$Y_t = 2 + 0,8Y_{t-1} - 0,1Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

con $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2_\varepsilon)$.

1. Dire se Y_t è stazionario.
2. Date quattro osservazioni da tale processo:

   $$y_1 = 4, y_2 = 3, y_3 = 1, y_4 = 2{,}5$$

   si calcolino le previsioni per Y_5, Y_6 e Y_7.

Soluzione (Es. n. 7.7 dell'Eserciziario):

Y_t ha la forma di un processo $AR(2)$.

1. Le soluzioni dell'equazione caratteristica

   $$1 - 0,8B + 0,1B^2 = 0$$

   sono pari a (verificare) $B_1 = 1,55051$ e $B_2 = 6,44949$. Essendo entrambe le radici maggiori di 1, il processo è stazionario.
2. Applicando la regola del valore atteso condizionato per il calcolo delle previsioni, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{5|4} = &\quad E_4[Y_5] = 2 + 0{,}8E_4[Y_4] - 0{,}1E_4[Y_3] + E_4[\varepsilon_5] \\
= &\quad 2 + 0{,}8y_4 - 0{,}1y_3 \\
= &\quad 2 + 0{,}8 \cdot 2{,}5 - 0{,}1 \cdot 1 = 3{,}9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{6|4} = &\quad E_4[Y_6] = 2 + 0,8E_4[Y_5] - 0,1E_4[Y_4] + E_4[\varepsilon_6] \\
= &\quad 2 + 0{,}8\hat{y}_{5|4} - 0{,}1y_4 \\
= &\quad 2 + 0{,}8 \cdot 3{,}9 - 0{,}1 \cdot 2{,}5 = 4{,}87
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{7|4} = &\quad E_4[Y_7] = 2 + 0{,}8E_4[Y_6] - 0{,}1E_4[Y_5] + E_4[\varepsilon_7] \\
= &\quad 2 + 0{,}8\hat{y}_{6|4} - 0{,}1\hat{y}_{5|4} \\
= &\quad 2 + 0{,}8 \cdot 4{,}87 - 0{,}1 \cdot 3{,}9 = 5{,}506
\end{aligned}$$

Domanda 5

Per la serie y_t è stato stimato un modello SARIMA$(1,1,1)(1,0,1)_{12}$. Quali analisi diagnostiche vanno effettuate per stabilire se il modello stimato è accettabile?

Soluzione:

- bisogna controllare l'incorrelazione dei residui (ACF e PACF, Test di Ljung-Box: specificare le ipotesi sottostanti). **Trattandosi di un modello stagionale bisogna porre particolare attenzione ai ritardi che sono multipli del periodo** (test di Box-Pierce: specificare ipotesi sottostante).
- va controllata la stazionarietà e l'invertibilità, e cioè....
- si deve verificare la significatività dei parametri

Domanda 6

Si definiscano i concetti di stazionarietà forte e stazionarietà debole per un processo stocastico, si dica in che relazione stanno tra loro e perché questa proprietà è importante.

Soluzione:

si veda il libro di testo a pag.162-165. La stazionarietà è importante per più motivi: perché la stazionarietà (insieme alla non invertibilità) permette di identificare in modo unico il processo generatore dei dati e perchè tutte le proprietà inferenziali della modellistica ARMA sono valide solo nel caso di stazionarietà.