SERIE STORICHE

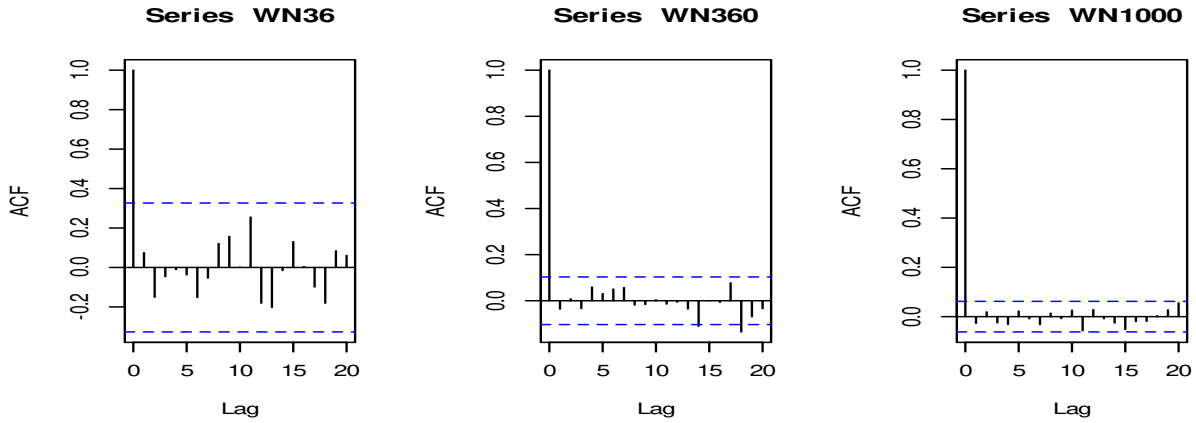
Padova, 22 febbraio 2023

Nome Cognome N. matricola

Corso di Laurea

Domanda 1

La figura 1 riporta le funzioni di autocorrelazione empiriche per tre realizzazioni di $WN \sim \mathcal{N}(0,1)$, di, rispettivamente, 36, 360 e 1000 osservazioni.



1. Si spieghi perché le bande di confidenza attorno allo zero hanno ampiezze diverse.
2. Si spieghi perché le autocorrelazioni nei tre grafici assumono valori diversi anche se si riferiscono tutte a serie WN.

Soluzione:

1. Se $\epsilon_t \sim WN$ per l'approssimazione di Bartlett $Var(\hat{\rho}_k) \sim \frac{1}{n}$, pertanto un intervallo di confidenza approssimato attorno a $\hat{\rho}_k$) è dato da $\pm\frac{1.96}{\sqrt{n}}$. Queste bande si usano per verificare l'ipotesi nulla $H_0 : \rho(k) = 0,\ k = 1, 2, \cdot$ e dipendono dalla lunghezza, n della serie: più lunga è la serie e più strette sono tali bande.
2. Due sono essenzialmente i motivi:
   (a) Le serie sono realizzazioni di un processo (WN) e quindi le osservazioni sono numeri casuali e non possono essere gli stessi anche se sono generate dallo stesso processo.
   (b) Le autocorrelazioni empiriche si calcolano come:

$$\rho_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-k} y_t y_{t+k}$$

   e il loro calcolo dipende pertanto da quante osservazioni ci sono nella serie.

Domanda 2

Per modellare la serie storica trimestrale dei tassi di disoccupazione nell'area Euro, per il periodo 2014:1 - 2019:4, y_t è stato usato un modello additivo del tipo $y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$. Utilizzando un'opportuna media mobile, i valori dei coefficienti specifici di stagionalità, per il periodo considerato, sono risultati:

Anno	I trim	II trim	III trim	IV trim
2014			11.583	11.425
2015	11.250	11.029	10.804	10.579
2016	10.379	10.187	9.975	9.741
2017	9.500	9.250	8.996	8.771
2018	8.550	8.333	8.133	7.942
2019	7.796	7.679		

Gli ultimi 4 valori disponibili sono :

$y_{2018,3} = 7.767 \quad y_{2018,4} = 7.967 \quad y_{2019,1} = 8.167 \quad y_{2019,2} = 7.500$

Sulla base di questi dati, determinare:

1. i valori assunti dalla componente stagionale
2. i valori destagionalizzati degli ultimi 4 periodi

Soluzione:

1. La tabella mostra i coefficienti specifici di stagionalità, che rappresentano una stima della componente stagionale congiunta ai fattori accidentali della serie $(\widehat{S_t + \varepsilon_t})$. Per calcolare i coefficienti grezzi di stagionalità, si devono calcolare le medie stagionali dei coefficienti specifici:

$$\hat{S}_j^* = \frac{1}{N} \sum_{T=1}^{N} CS_{T,j} \qquad j = 1, \cdots, 4 \tag{1}$$

dove N è il numero di anni e $CS_{T,j}$ è il coefficiente specifico corrispondente al periodo j dell'anno T. In questo esercizio abbiamo
$\hat{S}_1^* = 9.495 \quad \hat{S}_2^* = 9.296 \quad \hat{S}_3^* = 9.898 \quad \hat{S}_4^* = 9.692.$
Essendo la media dei coefficienti grezzi:

$$\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} \hat{S}_j^* = \bar{S}^* = 9.595,$$

i coefficienti *ideali* si ottengono sottraendo a quelli grezzi la loro media $\bar{S}^*$. I coefficienti ideali sono allora pari a
$\hat{S}_1 = -0.100 \quad \hat{S}_2 = -0.299 \quad \hat{S}_3 = 0.303 \quad \hat{S}_4 = 0.096.$

2. I valori destagionalizzati mediante i coefficienti ideali di stagionalità si ottengono sottraendo

ai valori $y_{T,j}$ i coefficienti ideali $\hat{S}_j$:

$$\hat{y}^{d*}_{2018,3} = y_{2018,3} - \hat{S}_3 = 7.464$$
$$\hat{y}^{d*}_{2018,4} = y_{2018,4} - \hat{S}_4 = 7.871$$
$$\hat{y}^{d*}_{2019,1} = y_{2019,1} - \hat{S}_1 = 8.267$$
$$\hat{y}^{d*}_{2019,2} = y_{2019,2} - \hat{S}_2 = 7.799.$$

Domanda 3 Si consideri il processo

$$X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t$$

con $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$ e $\mid \phi \mid < 1$. Si consideri ora il processo $Y_t = X_t + c\phi^t$ dove c è una costante diversa da zero.

1. Si mostri che Y_t può essere riscritto in forma AR(1).
2. Si dica, giustificando la risposta, se Y_t è stazionario.

Soluzione:

1. Si ha:

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi X_{t-1} + \epsilon_t + c\phi^t \\ &= \phi X_{t-1} + c\phi\phi^{t-1} + \epsilon_t \\ &= \phi(X_{t-1} + c\phi^{t-1}) + \epsilon_t \\ &= \phi Y_{t-1} + \epsilon_t \qquad \text{cvd} \end{aligned}$$

2. Calcoliamo il valore atteso di Y_t :

$$E[Y_t] = E[X_t + c\phi^t] = E[X_t] + E[c\phi^t] = c\phi^t$$

essendo $E[X_t] = 0$ in quanto $X_t \sim AR(1)$ senza costante. Pertanto, il valore atteso dipende da t e Y_t è non stazionario (nonostante possa essere scritto formalmente come un AR(1)).

Domanda 4

Dato un modello SARIMA(1,0,0)$\times$(0,1,1)$_4$, calcolare la previsione con orizzonte temporale $k = 5$ sapendo che:

- il parametro AR ϕ_1 è pari a -0,8;
- l'ultimo valore osservato della serie storica è $y_n = 3$;
- $\hat{y}_{n+1|n} = -2$ e $\hat{y}_{n+4|n} = 1$.

Soluzione:

Il processo indicato si esprime nella forma:

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B^4)Y_t = (1 - \Theta_1 B^4)\varepsilon_t.$$

Poiché

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B^4) = 1 - \phi_1 B - B^4 + \phi_1 B^5,$$

il processo può essere riscritto nel modo seguente:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + Y_{t-4} - \phi_1 Y_{t-5} + \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-4}.$$

Il previsore di Y_{n+5} è dunque pari a:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{n+5|n} &= E_n[Y_{n+5}] \\ &= \phi_1 E_n[Y_{n+4}] + E_n[Y_{n+1}] - \phi_1 E_n[Y_n] + \\ &\quad + E_n[\varepsilon_{n+5}] - \Theta_1 E_n[\varepsilon_{n+1}]. \end{aligned}$$

Il calcolo dei valori attesi condizionati avviene secondo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} E_n[Y_{n+j}] &= \begin{cases} y_{n+j} & j \leq 0 \\ \hat{y}_{n+j|n} & j > 0 \end{cases} \\ E_n[\varepsilon_{n+j}] &= \begin{cases} e_{n+j} & j \leq 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Pertanto, la previsione $\hat{y}_{n+5|n}$ è pari a

$$\hat{y}_{n+5|n} = \phi_1 \hat{y}_{n+4|n} + \hat{y}_{n+1|n} - \phi_1 y_n.$$

Sostituendo i valori noti nella precedente espressione otteniamo il risultato richiesto:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{n+5|n} &= -0,8 - 2 - (-0,8) \cdot 3 \\ &= -0,8 - 2 + 2,4 = -0,4. \end{aligned}$$

Domanda 5 In relazione alla procedura di Box-Jenkins, descrivere la fase di identificazione del modello, specificando come procedere quando si utilizzano i metodi di identificazione strutturale oppure quelli di identificazione automatica.

Soluzione:

Si veda il Paragrafo 6.1 del libro di testo.

Domanda 6 Si descriva in cosa consiste la cosiddetta trappola delle dummy e quali azioni devono essere messe in atto per non cadere in tale trappola.

Soluzione: Si vedano le pag. 58-59 del libro di testo.