SERIE STORICHE

Padova, 6 febbraio 2023

Nome Cognome N. matricola

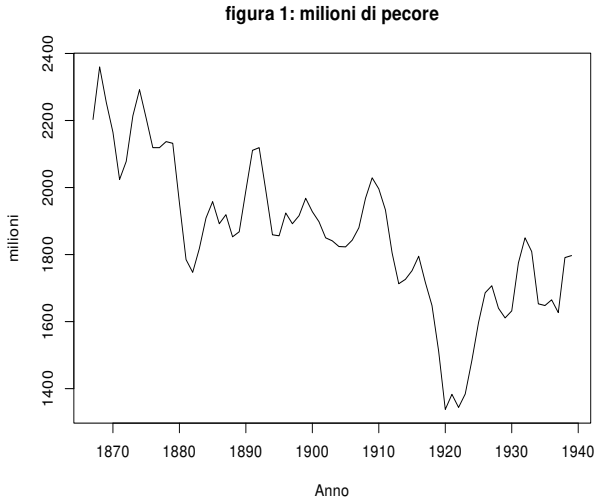
Corso di Laurea

Domanda 1

Si consideri la serie, y_t della popolazione delle pecore in Inghilterra e Galles dal 1867 al 1939 il cui grafico è riportato in figura 1. Si assuma di adattare a tale serie il modello:

$$y_t = y_{t-1} + \phi_1(y_{t-1} - y_{t-2}) + \phi_2(y_{t-2} - y_{t-3}) + \phi_3(y_{t-3} - y_{t-4}) + \epsilon_t$$

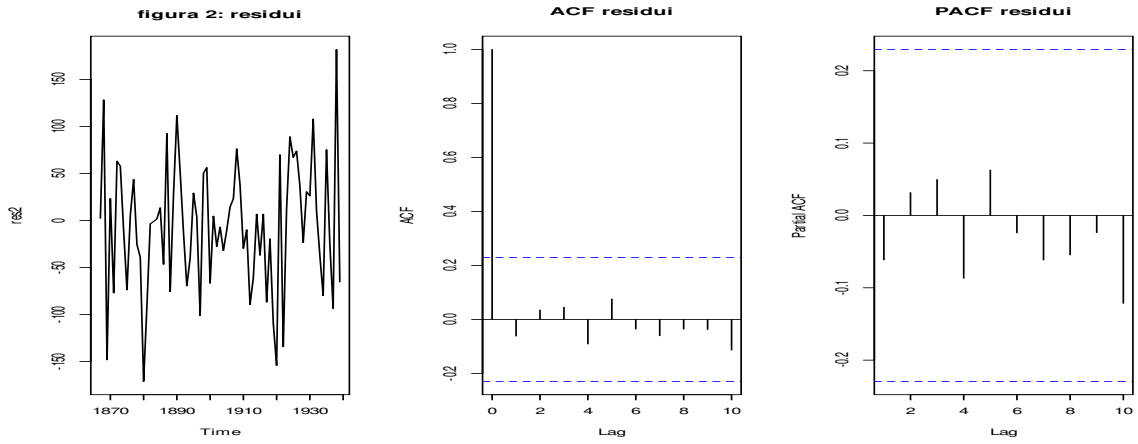
dove $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.



1. Si dica a che classe di processi appartiene il modello adattato (specificando tutti gli ordini)
2. Le stime del modello sono le seguenti:

   ```
   Coefficients:
          ar1      ar2      ar3
        0.4210  -0.2018  -0.3044
   s.e. 0.1193   0.1363   0.1243
   ```

   La figura 2, riporta il grafico dei residui assieme alle funzioni di autocorrelazione empiriche dei residui del modello adattato. Sulla base di tali risultati, si dica, giustificando la risposta, se tale modello si adatta bene ai dati.



3. Sapendo che gli ultimi 5 valori della serie sono:

Anno	1935	1936	1937	1938	1939
milioni di pecore	1648	1665	1627	1791	1797

si calcolino le previsioni per gli anni 1940-1942.

Soluzione:

1. Il modello può essere riscritto come:

$$y_t - y_{t-1} = \phi_1(y_{t-1} - y_{t-2}) + \phi_2(y_{t-2} - y_{t-3}) + \phi_3(y_{t-3} - y_{t-4}) + \epsilon_t$$

ossia, posto $x_t = (1 - B)y_t$

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \phi_3 x_{t-3} + \epsilon_t$$

quindi è un ARIMA(3,1,0).

2. Poiché il primo e il terzo coefficiente stimato risultano significativi e i coefficienti di autocorrelazione risultano non significativi (quindi i residui sembrano comportarsi come WN) il modello adattato sembra essere un buon modello.

3. Essendo:

$$y_{n+h} = y_{n+h-1} + \phi_1(y_{n+h-1} - y_{n+h-2}) + \phi_2(y_{n+h-2} - y_{n+h-3}) + \phi_3(y_{n+h-3} - y_{n+h-4}) + \epsilon_{n+h}$$

abbiamo (applicando le regole dei valori attesi condizionati):

$$\hat{y}_{1940} = y_{1939} + \hat{\phi}_1(y_{1939} - y_{1938}) + \hat{\phi}_2(y_{1938} - y_{1937}) + \hat{\phi}_3(y_{1937} - y_{1936}) = 1777{,}998$$

$$\hat{y}_{1941} = \hat{y}_{1940} + \hat{\phi}_1(\hat{y}_{1940} - y_{1939}) + \hat{\phi}_2(y_{1939} - y_{1938}) + \hat{\phi}_3(y_{1938} - y_{1937}) = 1718{,}866$$

$$\hat{y}_{1942} = \hat{y}_{1941} + \hat{\phi}_1(\hat{y}_{1941} - \hat{y}_{1940}) + \hat{\phi}_2(\hat{y}_{1940} - y_{1939}) + \hat{\phi}_3(y_{1939} - y_{1938}) = 1695{,}979$$

Domanda 2

Data una serie storica $y_t,\ t = 1, \ldots, n$, si dimostri che la combinazione di due medie mobili semplici di ordine, rispettivamente, 3 e 5 dà luogo a una media mobile di ordine 7 con pesi dati da:

$$(0{,}067; 0{,}133; 0{,}2; 0{,}2; 0{,}2; 0{,}133; 0{,}067).$$

Si dica, inoltre, quali altre caratteristiche possiede la media mobile risultante.

Soluzione: L'ordine della serie è pari a (3+5-1)=7. Inoltre, poiché abbiamo:

$$y_t^* = \frac{1}{3}(y_{t-1} + y_t + y_{t+1})$$

e

$$y_t^{**} = \frac{1}{5}(y_{t-2}^* + y_{t-1}^* + y_t^* + y_{t+1}^* + y_{t+2}^*)$$

si avrà:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
y_t^{**} = & \frac{1}{5}\frac{1}{3} & (y_{t-3}+ & y_{t-2}+ & y_{t-1}+ & & & & & & \\
 & & & y_{t-2}+ & y_{t-1}+ & y_t+ & & & & & \\
 & & & & y_{t-1}+ & y_t+ & y_{t+1}+ & & & & \\
 & & & & & y_t+ & y_{t+1}+ & y_{t+2} & & & \\
 & & & & & & y_{t+1}+ & y_{t+2}+ & y_{t+3} & & \\
y_t^{**} = & \frac{1}{15} & (y_{t-3}+ & 2y_{t-2}+ & 3y_{t-1}+ & 3y_t+ & 3y_{t+1}+ & 2y_{t+2}+ & y_{t+3}) & . &
\end{array}$$

Si conferma quindi che la media mobile risultante è una media mobile di ordine 7 con pesi dati da:

$$\frac{1}{15} = 0{,}067;\ \frac{2}{15} = 0{,}133;\ \frac{3}{15} = 0{,}2\ \frac{3}{15} = 0{,}2\ \frac{3}{15} = 0{,}2;\ \frac{2}{15} = 0{,}133;\ \frac{1}{15} = 0{,}067$$

Inoltre, tale media mobile risulta simmetrica e centrata.

Domanda 3 Sia $\epsilon_t \sim WN\ \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$, si dica, **giustificando la risposta**, se i seguenti processi sono o meno stazionari.

1. $Y_t = \mu + t \cdot \epsilon_t$, dove μ è costante.
2. $W_t = Y_t - Y_{t-1}$, dove $Y_t = \mu + t \cdot \epsilon_t$.

Soluzione:

1. $$E[Y_t] = \mu + tE[\epsilon_t] = \mu$$
$$Var(Y_t) = Var(\mu + t \cdot \epsilon_t) = t^2 Var(\epsilon_t) = t^2\sigma_\epsilon^2$$
Poiché la varianza dipende dal tempo, il processo NON è stazionario.
2. $$E[W_t] = E[Y_t - Y_{t-1}] = \mu - \mu = 0$$
$$\begin{aligned} Var(W_t) &= Var(Y_t - Y_{t-1}) = Var(\mu + t\epsilon_t - \mu - (t-1)\epsilon_{t-1}) \\ &= Var(t\epsilon_t - (t-1)\epsilon_{t-1}) \\ &= t^2 Var(\epsilon_t) + (t-1)^2 Var(\epsilon_{t-1}) - 2t(t-1)Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}) \\ &= (2t^2 - 2t + 1)\sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$
Poiché la varianza dipende dal tempo, il processo NON è stazionario.

Domanda 4

Si supponga che $Y_t = a+bt+S_t+X_t$, dove S_t è la componente stagionale deterministica e periodica con periodo pari a s, mentre X_t è un processo SARIMA$(p,0,q)(P,1,Q)_s$. Si determini quale modello segue il processo $W_t = (1-B^s)Y_t$.

Soluzione:

$$\begin{aligned} W_t &= Y_t - Y_{t-s} \\ &= (a+bt+S_t+X_t) - (a+b(t-s)+S_{t-s}+X_{t-s}) \\ &= bs + S_t - S_{t-s} + X_t - X_{t-s} \end{aligned}$$

e tenendo conto che $S_t = S_{t-s}$

$$= bs + (1-B^s)X_t$$

pertanto W_t è un SARIMA$(p,0,q)(P,0,D)_s$ con costante pari a bs.

Domanda 5

Si consideri un modello con una componente periodica di periodo 12 e un trend polinomiale del del tempo di grado 4. Dire quali caratteristiche deve avere una media mobile perché sia adatta a stimare il trend.

Soluzione:

- deve essere la centratura di due m.m. semplici di periodo 12 così da eliminare la componente periodica;
- deve conservare un trend polinomiale di grado 4, per cui deve essere: $\sum_{i=-6}^{6} \theta_i = 1$; $\sum_{i=-6}^{6} i\theta_i = 0$; $\sum_{i=-6}^{6} i^2\theta_i = 0$; $\sum_{i=-6}^{6} i^3\theta_i = 0$; $\sum_{i=-6}^{6} i^4\theta_i = 0$.

Domanda 6

Si vuole individurare un buon modello per la serie storica y_t, $(t = 1, ..., n)$. Indipendentemente dall'approccio che si utilizza, che caratteristiche deve avere un modello per essere considerato buono?

Soluzione:

1. deve considerare tutte le eventuali componenti (trend, stagionalità, etc). Ciò può avvenire tramite modelli di regressione con componenti deterministiche, in maniera non parametrica con le medie mobili o mediante modelli della classe SARIMA;
2. i residui del modello devono risultare incorrelati;
3. il modello non deve contenere parametri non significativi;
4. devono essere soddisfatti tutti gli assunti del modello come la gaussianità o, nel caso dei modelli ARMA, la stazionarietà e l'invertibilità.
5. spiegare la maggior parte possibile della variabilità dei dati.