VARIANZA DI UN ARMA (1,1)

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \vartheta \varepsilon_{t-1}$$

$m/p.\ \phi_0 = 0 \quad \Rightarrow E[Y_t] = 0$

$$V[Y_t] = E[Y_t^2] = E\left[(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \vartheta_1 \varepsilon_{t-1})(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \vartheta_1 \varepsilon_{t-1})\right]$$

$$= E\left[\phi_1^2 Y_{t-1}^2 + \varepsilon_t \phi_1 Y_{t-1} - \phi \vartheta Y_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \right.$$

$$+ \varepsilon_t \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t^2 - \vartheta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} +$$

$$\left. - \vartheta_1 \phi_1 \varepsilon_{t-1} Y_{t-1} - \vartheta \varepsilon_{t-1} \varepsilon_t + \vartheta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 \right] =$$

$$E[Y_t^2] = \phi_1^2 E[Y_{t-1}^2] - \vartheta\phi E[\varepsilon_{t-1}^2] + E[\varepsilon_t^2] -$$

per stazionarietà $- \vartheta_1 \phi_1 E[\varepsilon_{t-1}^2] + \vartheta_1^2 E[\varepsilon_{t-1}^2]$

$$(1 - \phi_1^2) E[Y_t^2] = \sigma_\varepsilon^2 (-\vartheta\phi + 1 - \vartheta\phi + \vartheta_1^2)$$

$$V[Y_t] = E[Y_t^2] = \frac{(1 + \vartheta_1^2 - 2\phi_1\vartheta_1)}{(1 - \phi^2)} \sigma_\varepsilon^2$$

$$Y_{t-1}\varepsilon_{t-1} = (\phi_0 + \phi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} - \vartheta \varepsilon_{t-2})\varepsilon_{t-1}$$

COVARIANZA DI UN ARMA(1,1) (a media nulla)

K=1

$$\gamma_1 = E[Y_t Y_{t-1}] =$$

$$= E[(\phi Y_{t-1} + \varepsilon_t - \vartheta \varepsilon_{t-1}) Y_{t-1}] =$$

$\phi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} - \vartheta \varepsilon_{t-2}$

$$= E[\phi Y_{t-1}^2 + \varepsilon_t Y_{t-1} - \vartheta \varepsilon_{t-1} Y_{t-1}]$$

$$= \phi \gamma_0 + 0 - \vartheta E[\varepsilon_{t-1}^2] =$$

$$= \phi \left(\frac{1 + \vartheta^2 - 2\vartheta\phi}{1 - \phi^2} \right) \sigma_\varepsilon^2 - \vartheta \sigma_\varepsilon^2 =$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \left(\frac{\phi + \phi\vartheta^2 - 2\vartheta\phi^2 - \vartheta + \phi^2\vartheta}{1 - \phi^2} \right)$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \left(\frac{\phi + \phi\vartheta^2 - \phi^2\vartheta - \vartheta}{1 - \phi^2} \right) =$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \frac{(\phi - \vartheta)(1 - \vartheta\phi)}{1 - \phi^2}$$

$$\phi + \phi\vartheta^2 - \phi^2\vartheta - \vartheta = \phi\vartheta(\vartheta - \phi) - (\vartheta - \phi) =$$

$$= (\vartheta - \phi)(\vartheta\phi - 1) = \text{cambio segno ad entrambi}$$

$$= (\phi - \vartheta)(1 - \phi\vartheta)$$