La regione di stazionarietà di un processo AR(2)
(TDF - rielaborazione da Wei, W.W.S., *Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods*, 2nd ed., Addison Wesley, 2005, pp. 39-41)

Si consideri il generico processo AR(2)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \tag{1a}$$

ossia

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2\right) Y_t = \varepsilon_t \tag{1b}$$

Trattandosi di un modello autoregressivo di ordine finito per essere stazionario, le radici dell'equazione caratteristica

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2\right) = 0$$

devono giacere all'esterno del cerchio di raggio unitario (ossia, i loro valori assoluti devono essere maggiori di uno).

Esempio 1: il processo $\left(1 - 1.5B + 0.56B^2\right) Y_t = \varepsilon_t$ è stazionario perché le due radici dell'equazione $\left(1 - 1.5B + 0.56B^2\right) = 0$, sono

$$B_{1/2} = \frac{1.5 \pm \sqrt{2.25 - 2.24}}{1.12} = \begin{cases} 10/7 \\ 5/4 \end{cases}$$

sono entrambe maggiori di 1.

Esempio 2: il processo $\left(1 - 0.2B - 0.8B^2\right) Y_t = \varepsilon_t$, invece, è non stazionario, perché le dure radici dell'equazione $\left(1 - 0.2B - 0.8B^2\right) = 0$ sono B_1=1 e B_2=-5/4

La condizione di stazionarietà di un modello AR(2) può essere espressa anche con riferimento ai suoi parametri ϕ_1 e ϕ_2.

Indichiamo con B_1 e B_2 le radici di $\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right)=0$ o, in maniera equivalente, di $\phi_2 B^2+\phi_1 B-1=0$. Si ha:

$$B_1=\frac{-\phi_1+\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2\phi_2} \quad \text{e} \quad B_2=\frac{-\phi_1-\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2\phi_2}.$$

Ora, si noti che

$$\frac{1}{B_1}=\frac{\phi_1+\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2}. \tag{2a}$$

L'espressione (2a) si ottiene nel modo seguente:

$$B_1=\frac{-\phi_1+\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2\phi_2} \Rightarrow \frac{1}{B_1}=\frac{2\phi_2}{-\phi_1+\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}} \Rightarrow \frac{1}{B_1}=\frac{2\phi_2\left(\phi_1+\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}\right)}{-\phi_1^2+\phi_1^2+4\phi_2},$$

da cui, semplificando, si arriva alla (2a).

Procedendo in modo analogo, si ricava:

$$\frac{1}{B_2}=\frac{\phi_1-\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2}. \tag{2b}$$

La condizione di stazionarietà $|B_i|>1$, i=1,2, implica $\left|\frac{1}{B_i}\right|<1$, i=1,2.

Deve pertanto essere

$$\left|\frac{1}{B_1}\cdot\frac{1}{B_2}\right|<1 \Rightarrow \left|\frac{\phi_1^2-\phi_1^2-4\phi_2}{4}\right|=|\phi_2|<1$$

e

$$\left|\frac{1}{B_1}+\frac{1}{B_2}\right|<2 \Rightarrow \left|\frac{\phi_1+\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}+\phi_1-\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2}\right|=|\phi_1|<2.$$

Abbiamo dunque derivato due **condizioni *necessarie* per la stazionarietà del processo AR(2)**, indipendentemente dal fatto che le radici siano reali o complesse:

$$\begin{cases}-1<\phi_2<1\\-2<\phi_1<2\end{cases}. \tag{3}$$

Si hanno radici reali quando $\phi_1^2+4\phi_2\geq 0$, il che avviene sempre per $\phi_2>0$ (che, tenuto conto della (3), equivale a $0<\phi_2<1$), e ciò comporta:

$$-1 < \frac{1}{B_2} = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \leq \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} = \frac{1}{B_1} < 1. \tag{4}$$

Mostriamo che l'espressione (4) è equivalente a

$$\begin{cases} \phi_2 + \phi_1 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \end{cases}. \tag{5}$$

Consideriamo prima la parte destra della diseguaglianza (4). Procedendo con i calcoli si ha:

$$\frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} < 1 \Rightarrow \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2 - \phi_1 \Rightarrow \phi_1^2 + 4\phi_2 < 4 - 4\phi_1 + \phi_1^2 \Rightarrow \phi_2 + \phi_1 < 1.$$

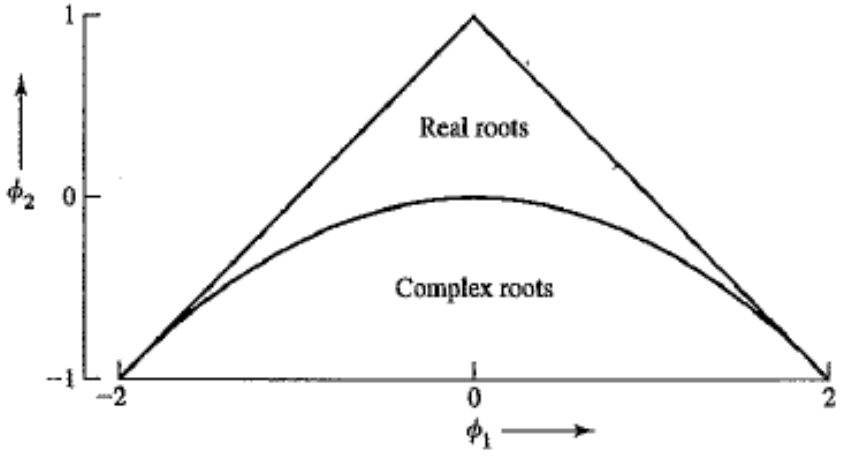
Analogamente, sviluppando la parte sinistra della diseguaglianza (4) si ricava:

$$-1 < \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \Rightarrow \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2 + \phi_1 \Rightarrow \phi_1^2 + 4\phi_2 < 4 + 4\phi_1 + \phi_1^2 \Rightarrow \phi_2 - \phi_1 < 1.$$

La sezione di piano limitata dalla (3) e dalla (4) costituisce la regione entro cui possono variare i parametri ϕ_1 e ϕ_2 di un processo AR(2) stazionario. Data la forma triangolare (figura 1), tale regione viene detta *Triangolo di stazionarietà* di un processo AR(2).

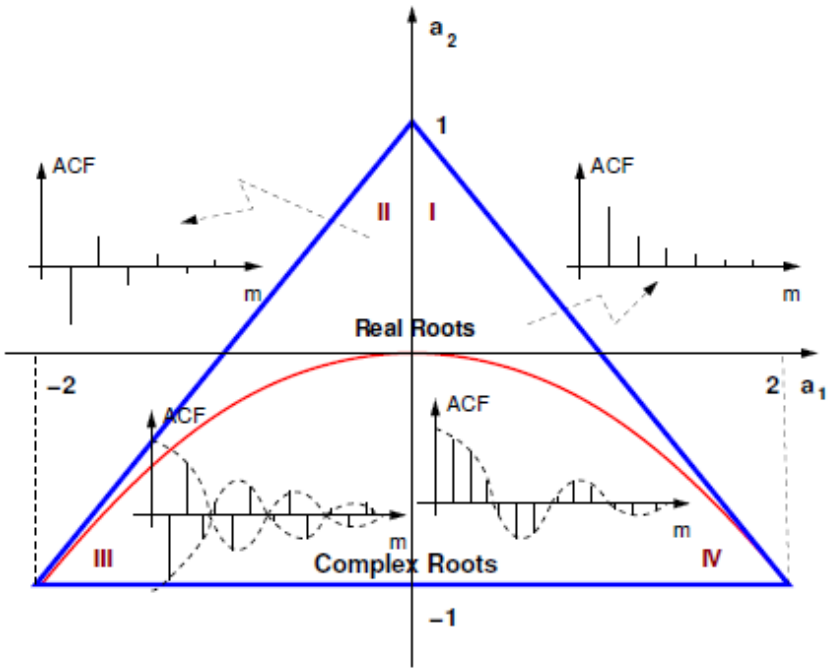
Ora, si noti che quando $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ si hanno radici complesse. Ciò avviene per $-1 < \phi_2 < 0$ e $\phi_2 < -\frac{1}{4}\phi_1^2$, ossia nella porzione del triangolo delimitata superiormente dalla parabola $\phi_2 = -\frac{1}{4}\phi_1^2$ (figura 2). Nella parte restante del triangolo di stazionarietà si collocano invece le coppie di parametri (ϕ_1, ϕ_2) dei processi AR(2) stazionari a cui corrispondono radici reali dell'equazione caratteristica $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = 0$.

Figura 1: Triangolo di stazionarietà di un processo AR(2): radici reali e complesse



Qualche dettaglio sulla forma dei correlogrammi globali al variare delle coppie di parametri (ϕ_1, ϕ_2) viene mostrato nella figura 2.

Figura 2: ACF del processo AR(2) nel triangolo di stazionarietà



i) **Real roots** Region 1: Monotonically decaying ACF
ii) **Real roots** Region 2: Decaying oscillating ACF
iii) **Complex roots** Region 3: Oscilating pseudoperiodic ACF
iv) **Complex roots** Region 4: Pseudoperiodic ACF

Un esercizio

(a) Trovare l'insieme dei valori di α *tali per cui il processo AR(2)*

$$Y_t = Y_{t-1} + \alpha Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

è stazionario.

(b) Calcolare ρ_3 *per* $\alpha = -\frac{1}{2}$.

(a) Prima di procedere con i calcoli, notiamo anzitutto che per $\alpha = 0$ si ha un processo *random walk*, che non è stazionario. Pertanto, assumiamo $\alpha \neq 0$. Le radici dell'equazione caratteristica $-\alpha B^2 - B + 1 = 0$ o, che è lo stesso, $\alpha B^2 + B - 1 = 0$, sono pari a:

$$B_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\alpha}}{2\alpha}.$$

Perché il processo sia stazionario si deve avere $|B_1| > 1$ e $|B_2| > 1$. Se consideriamo i reciproci delle due soluzioni, $\frac{1}{B_1} = \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$ e $\frac{1}{B_2} = \frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}$, per un processo stazionario si deve avere $\left|\frac{1}{B_1} \cdot \frac{1}{B_2}\right| < 1$, ossia $\left|\frac{1}{B_1} \cdot \frac{1}{B_2}\right| = \left|\frac{1-1-4\alpha}{4}\right| = |\alpha| < 1$. Se $1 + 4\alpha \geq 0$ (caso di radici reali) vale la seguente diseguaglianza:

$$-1 < \frac{1}{B_2} = \frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2} < \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2} = \frac{1}{B_1} < 1.$$

La parte sinistra della diseguaglianza, $-1 < \frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}$, è verificata per $\alpha < 2$, mentre quella destra, $\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2} < 1$, è verificata per $\alpha < 0$.

Combinando dunque le due condizioni trovate, $|\alpha| < 1$ e $\alpha < 0$, si ricava la condizione di stazionarietà

$$-1 < \alpha < 0.$$

Inoltre, l'equazione caratteristica del processo ha radici reali per $1 + 4\alpha \geq 0$, ossia per $-\frac{1}{4} \leq \alpha < 0$, e radici complesse per $-1 < \alpha < -\frac{1}{4}$.

(b) Per calcolare la funzione di autocorrelazione globale, si moltiplichino ambo i lati della forma esplicita del processo, $Y_t = Y_{t-1} + \alpha Y_{t-2} + \varepsilon_t$, per Y_{t-k}, si prenda il valore atteso

$$E(Y_{t-k}Y_t) = E(Y_{t-k}Y_{t-1}) + \alpha E(Y_{t-k}Y_{t-2}) + E(Y_{t-k}\varepsilon_t) \Rightarrow \gamma_k = \gamma_{k-1} + \alpha\gamma_{k-2}, \quad k \geq 1$$

e si divida il risultato per γ_0:

$$\rho_k = \rho_{k-1} + \alpha\rho_{k-2}, \quad k \geq 1.$$

Sostituendo $-\frac{1}{2}$ ad α, e tenuto conto che $\rho_1 = \rho_{-1}$, si ottiene

$$\rho_1 = 1 - \frac{1}{2}\rho_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{2}{3},$$

$$\rho_2 = \rho_1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \rho_2 = \frac{1}{6},$$

$$\rho_3 = \rho_2 - \frac{1}{2}\rho_1 \Rightarrow \rho_3 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.$$