Due processi diversi con la stessa funzione di autocovarianza

1) $Y_t = \varepsilon_t + \vartheta \varepsilon_{t-1} \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \qquad |\vartheta| < 1$

$E[Y_t] = 0$

$V[Y_t] = (1+\vartheta^2)\sigma^2$

$Cov[Y_t, Y_{t+1}] = E[(\varepsilon_t + \vartheta \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t+1} + \vartheta \varepsilon_t)] = \vartheta E[\varepsilon_t^2] = \vartheta \sigma^2$

$Cov[Y_t, Y_{t+k}] = 0 \qquad \forall k \geq 2$

2) $Z_t = Y_t + \frac{1}{\vartheta} Y_{t-1} \qquad Y_t \sim WN(0, \vartheta^2 \sigma^2) \qquad |\vartheta| < 1$

$E[Z_t] = 0$

$V[Z_t] = V[Y_t + \frac{1}{\vartheta} Y_{t+1}] = \vartheta^2 \sigma^2 + \frac{1}{\vartheta^2} \vartheta^2 \sigma^2 = (1+\vartheta^2)\sigma^2$

$Cov[Z_t, Z_{t+1}] = E[(Y_t + \frac{1}{\vartheta} Y_{t-1})(Y_{t+1} + \frac{1}{\vartheta} Y_t)] =$

$= \frac{1}{\vartheta} E[Y_t^2] = \frac{1}{\vartheta} \vartheta^2 \sigma^2 = \vartheta \sigma^2$

$Cov[Z_t, Z_{t+k}] = 0 \qquad \forall k \geq 2$

Invertibilità

Per Y_t si ha:

$$Y_t = \varepsilon_t + \vartheta \varepsilon_{t-1} \Longrightarrow \varepsilon_t = Y_t - \vartheta \varepsilon_{t-1} \qquad |\vartheta| < 1$$

Sostituendo

$$Y_t = \varepsilon_t + \vartheta (Y_{t-1} - \vartheta \varepsilon_{t-2}) = \varepsilon_t + \vartheta Y_{t-1} - \vartheta \varepsilon_{t-2}$$

$$= \varepsilon_t + \vartheta Y_{t-1} - \vartheta^2 (Y_{t-2} - \vartheta \varepsilon_{t-3}) =$$

$$= \varepsilon_t + \vartheta Y_{t-1} - \vartheta^2 Y_{t-2} + \vartheta^3 \varepsilon_{t-3} = \dots \text{ e così via}$$

Alla j-esima sostituzione si ha

$$\boxed{Y_t = \sum_{i=1}^{j-1} (-\vartheta)^i Y_{t-i} + \varepsilon_t - (-\vartheta)^j \varepsilon_{t-j}} \qquad j > 1$$

Analogamente per Z_t si ha

$$\boxed{Z_t = \sum_{i=1}^{j-1} \left(-\frac{1}{\vartheta}\right)^i Y_{t-i} + Y_t - \left(-\frac{1}{\vartheta}\right)^j Y_{t-j}} \qquad j > 1$$

Essendo $|\vartheta| < 1$

$$\lim_{j \to \infty} \vartheta^j = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{j \to \infty} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^j = \infty$$

Dunque, solo nel primo caso riesco a scrivere il processo come

$$Y_t = \sum_{i=1}^{\infty} (-\vartheta)^i Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

$$= h(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots) + \varepsilon_t \Longleftarrow \text{INVERTIBILE}$$