Es 1.i slide 26

$$Y_t = \varepsilon_t - 0.5\,\varepsilon_{t-1} - 0.2\,\varepsilon_{t-2} \qquad \varepsilon_t \sim WN(0,4)$$

- $E[Y_t] = E[\varepsilon_t] - 0.5\,E[\varepsilon_{t-1}] - 0.2\,E[\varepsilon_{t-2}] = 0$ non dip. dal tempo

- $V[Y_t] = V[\varepsilon_t - 0.5\,\varepsilon_{t-1} - 0.2\,\varepsilon_{t-2}] =$

$= V[\varepsilon_t] + (-0.5)^2 V[\varepsilon_{t-1}] + (-0.2)^2 V[\varepsilon_{t-2}] +$ no covar.

$= \sigma^2_\varepsilon + 0.25\,\sigma^2_\varepsilon + 0.04\,\sigma^2_\varepsilon = 4 + 0.25 \cdot 4 + 0.04 \cdot 4 = 5{,}16$

non dipende dal tempo

- $Cov[Y_t Y_{t+h}] = E[Y_t \cdot Y_{t+h}] + E[Y_t] \cdot E[Y_{t+h}] =$

$= E[(\varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} - 0.2\,\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t+h} - 0.5\,\varepsilon_t - 0.2\,\varepsilon_{t-1})] =$

$= E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+h} - 0.5\,\varepsilon_t^2 - 0.2\,\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} - 0.5\,\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t+h} +$

$+ 0.5^2 \varepsilon_{t-1}\varepsilon_t + 0.5 \cdot 0.2\,\varepsilon_{t-1}^2 - 0.2\,\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t+h} +$

$+ 0.5 \cdot 0.2\,\varepsilon_{t-2}\varepsilon_t + 0.2^2 \varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1}]$

$= -0.5\,E[\varepsilon_t^2] + 0.5 \cdot 0.2\,E[\varepsilon_{t-1}^2] = -0.5\,\sigma^2_\varepsilon + 0.1\,\sigma^2_\varepsilon =$

$= -0.5 \cdot 4 + 0.1 \cdot 4 = -1.6$

Cov

$$Cov[Y_t Y_{t+2}] = E[Y_t Y_{t+2}] =$$

$$= E\left[(\varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t+2} - 0.5\varepsilon_{t+1} - 0.2\varepsilon_t)\right] =$$

$$= \dots$$

$$= -0.2\, E[\varepsilon_t^2] = -0.2 \cdot 4 = -0,8$$

$$Cov[Y_t Y_{t+3}] = E\left[(\varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t+3} - 0.5\varepsilon_{t+2} - 0.2\varepsilon_{t+1})\right] =$$

$$= 0$$

idem per $Cov[Y_t Y_{t+k}]$ per $k \geq 3$

Dunque la covar. non dipende dal tempo ma solo dal lag temporale

Dunque il processo è debolm. stazion.

ES 1. ii slide 26

$$Y_t = (-1)^t (1 - \vartheta B)\varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2_\varepsilon) \quad |\vartheta| < 1$$

Posso scrivere

$$Y_t = \begin{cases} \varepsilon_t - \vartheta \varepsilon_{t-1} & \text{per } t=0 \text{ e } t \text{ pari} \\ -(\varepsilon_t - \vartheta \varepsilon_{t-1}) & \text{per } t \text{ dispari} \end{cases}$$

- $E[Y_t] = 0 \quad \forall t$ non dip. dal tempo

- $V[Y_t] = (-1)^2 V[\varepsilon_t] + (-\vartheta)^2 V[\varepsilon_{t-1}] = (1+\vartheta^2)\sigma^2_\varepsilon$

- $Cov[Y_t Y_{t+1}] = -E[(\varepsilon_t - \vartheta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t+1} - \vartheta\varepsilon_t)] =$

  $\Rightarrow$ questo vale $\forall t$ perché se t è pari allora $t+1$ è dispari e viceversa

  $= -E[\underbrace{\varepsilon_t\varepsilon_{t+1}}_{=0} - \vartheta\varepsilon_t^2 - \vartheta\underbrace{\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t+1}}_{=0} + \vartheta^2\underbrace{\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t}_{=0}]$

  $= \vartheta E[\varepsilon_t^2] = \vartheta\sigma^2_\varepsilon$

$Cov[Y_t Y_{t+2}] \overset{(\pm 1)}{=} ? E[(\varepsilon_t - \vartheta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t+2} - \vartheta\varepsilon_{t+1})] = 0$

sono tutti ε_t sfasati nel tempo

- $E[\,], V[\,]$ non dip. dal tempo
  $Cov[\,]$ dip solo da $k = |t-s|$ $\Rightarrow$ processo debolmente stazionario

Es 2 slide 26

$$Y_t = t^\alpha (1-\vartheta B)\varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2_\varepsilon) \qquad |\vartheta|<1, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$E[Y_t] = t^\alpha E(\varepsilon_t - \vartheta \varepsilon_{t-1}) = 0 \quad \text{non dip dal tempo}$$

$$V[Y_t] = t^{2\alpha}(\sigma^2_\varepsilon + \vartheta^2 \sigma^2_\varepsilon) = t^{2\alpha}(1+\vartheta^2)\sigma^2$$

$$Cov[Y_t Y_{t+1}] = E\left[t^\alpha(\varepsilon_t - \vartheta\varepsilon_{t-1})\cdot(t+1)^\alpha(\varepsilon_{t+1} - \vartheta\varepsilon_t)\right] =$$

$$= E\left[t^\alpha(t+1)^\alpha(\varepsilon_t\varepsilon_{t+1} - \vartheta\varepsilon_t^2 - \vartheta\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t+1} + \vartheta^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t)\right]$$

$$= t^\alpha(t+1)^\alpha(-\vartheta)\sigma^2$$

$$Cov[Y_t Y_{t+2}] = E\left[t^\alpha(t+2)^\alpha(\varepsilon_t\varepsilon_{t+2} - \vartheta\varepsilon_t\varepsilon_{t+1} - \vartheta\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t+1} + \vartheta^2 \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t+1})\right]$$

$$= 0$$

$$\forall k \geq 2$$

Var e Cov, in gen dipendono dal tempo; ciò fatto non è vero nel caso $\alpha = 0$

Dunque il processo è debolm. stat. per $\alpha = 0$