Esercizio 1

Data una serie storica $y_t,\ t = 1, \ldots, n$, si dimostri che la combinazione di due medie mobili semplici di ordine, rispettivamente, 3 e 5 dà luogo a una media mobile di ordine 7 con pesi dati da:

$$(0{,}067; 0{,}133; 0{,}2; 0{,}2; 0{,}2; 0{,}133; 0{,}067).$$

Si dica, inoltre, quali altre caratteristiche possiede la media mobile risultante.

Soluzione

Si ha che:

$$y_t^* = M_1 y_t = \frac{1}{3}(y_{t-1} + y_t + y_{t+1})$$

e

$$y_t^{**} = M_2(M_1 y_t) = \frac{1}{5}(y_{t-2}^* + y_{t-1}^* + y_t^* + y_{t+1}^* + y_{t+2}^*)$$

Si avrà quindi:

$$\begin{aligned} y_t^{**} = \frac{1}{5}\frac{1}{3}(&y_{t-3} + y_{t-2} + y_{t-1} + \\ &y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + \\ &y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \\ &y_t + y_{t+1} + y_{t+2} + \\ &y_{t+1} + y_{t+2} + y_{t+3}) \end{aligned}$$

e dunque

$$y_t^{**} = \frac{1}{15}(y_{t-3} + 2y_{t-2} + 3y_{t-1} + 3y_t + 3y_{t+1} + 2y_{t+2} + y_{t-3})$$

La media mobile è effettivamente a 7 termini ed è simmetrica e centrata

Esercizio 2

Si derivi la media mobile ottenuta come centratura di due medie mobili aritmetiche semplici di ordine 6.
Si descrivano le caratteristiche della media mobile così ottenuta.

Soluzione

$$y^*_{t-1,t} = \frac{1}{6}(y_{t-3} + y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2})$$
$$y^*_{t,t+1} = \frac{1}{6}(y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2} + y_{t+3})$$

quindi:

$$\begin{aligned} y^{**}_t &= \frac{y^*_{t-1,t} + y^*_{t,t+1}}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{y_{t-3} + y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2}}{6} + \frac{y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2} + y_{t+3}}{6}\right) = \\ &= \frac{y_{t-3} + 2y_{t-2} + 2y_{t-1} + 2y_t + 2y_{t+1} + 2y_{t+2} + y_{t+3}}{12} \end{aligned}$$

y^{**}_t è una media mobile a 7 termini, simmetrica e con pesi che, all'estremità, sono la metà dei pesi centrali.

Esercizio 3

Si considerino le due medie mobili

$$M_1 = -y_{t-2} + \frac{1}{2}y_{t-1} + \frac{5}{4}y_t + \frac{3}{4}y_{t+1} - \frac{1}{2}y_{t+2}$$
$$M_2 = \frac{1}{4}y_{t-1} + \frac{1}{2}y_t + \frac{1}{4}y_{t+1}$$

e si supponga di volerle applicare:
(i) ad una serie storica incorrelata al fine di ridurne la variabilità e
(ii) ad una serie storica generata da un modello con trend evolutivo e componente erratica, al fine di stimarne il trend.
a) Quale delle due medie mobili sarebbe preferibile e perché?
b) Ci sono motivi per ritenere che una delle due medie mobili non debba essere utilizzata?

Soluzione

La riduzione di variabilità di una serie a seguito dell'applicazione di una media mobile si misura con il rapporto di riduzione della varianza (RRV).
Per M_1 e M_2si ha

$$RRV_1 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{25}{16} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} \simeq 3.625$$
$$RRV_2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} \simeq 0.375 < 1$$

Dunque M_1 è una serie storica la cui componente accidentale ha una variabilità che è oltre tre volte e mezzo quella della serie originale! M_2, invece, ha un RRV pari al 37,5% e quindi, è chiaro che l'obiettivo di riduzione della componente erratica nel caso (i) può essere perseguito solo mediante l'utilizzo di M_2.

Per rispondere al caso (ii) dobbiamo verificare se le due m.m conservano un trend lineare. Per M_1 si ha:

$$\sum_{i=-2}^{2} \theta_i = 1$$

$$\sum_{i=-2}^{2} i\vartheta_i = 2 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{3}{4} - 1 = \frac{5}{4} \neq 0.$$

Per M_2 si ha:

$$\sum_{i=-1}^{1} \theta_i = 1$$

$$\sum_{i=-1}^{1} i\vartheta_i = -\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = 0.$$

Ne consegue che l'applicazione di M_1 non lascerebbe inalterao un trend di tipo lineare. L'utilizzo della media mobile M_1 è quindi sconsigliabile.

Esercizio 4

a) Trovare la media mobile a 3 termini che minimizza il rapporto di riduzione della varianza tra quelle che conservano un trend polinomiale di secondo grado.
b) Oltre a quella trovata,quante altre m.m. tre termini conservano trend polinomiali quadratici?
c) la m.m. trovata conserva trend lineari?
d) a quanto ammonta il rapporto di riduzione della varianza?
e) La media mobile a tre termini che minimizza il rapporto di riduzione dsella varianza tra quelle che conservano trend lineari, produce un rapporto di riduzione della varianza maggiore, minore o uguale a quello trovato?

Soluzione

a) per conserare un trendo quadratico, una m.m. a 3 termini deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \vartheta_{-1} + \vartheta_0 + \vartheta_1 &= 1 \\ -\vartheta_{-1} + \vartheta_1 &= 0 \\ (-1)^2\vartheta_{-1} + (1)^2\vartheta_1 &= 0 \end{aligned}$$

È immediato verificare che la soluzione è unica e che deve essere : $\vartheta_{-1} = \vartheta_1 = 0$ e $\vartheta_0 = 1$.

b) no, nessuna

c) Si' è facile vedere che le condizioni:

$$\sum_{i=-1}^{1} \theta_i = 1$$

$$\sum_{i=-1}^{1} i \cdot \theta_i = 0$$

sono soddisfatte

d) Il rapporto di riduzione della varianza per una generica media mobile di ordine $2m+1$ risulta pari a

$$\frac{\sigma^{2*}}{\sigma^2} = \sum_{i=-m}^{m} \vartheta_i^2. \tag{1}$$

In questo caso il rapporto è pari a 1. Si tratta di un'ovvia conseguenza del fatto che la media mobile in questione non modifica la serie storica alla quale viene applicata.

e) Sappiamo che la media mobile a 3 termini che conserva polinomi di primo è una media mobile aritmetica con pesi tutti uguali a 1/3. In questo caso il rapporto di riduzione della varianza è pari a:

$$\sum_{i=-m}^{m} \vartheta_i^2 = 3 \cdot (\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}. \tag{2}$$

che è inferiore a quello che si trova imponendo il vincolo di conservazione dei polinomi di secondo grado.

Esercizio 5

Si consideri la serie ε_t generata da un $WN(0,4)$ e ad essa si applichi la seguente media mobile a tre termini:

$$\varepsilon_t^* = \frac{1}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_t + \frac{1}{4}\varepsilon_{t+1}$$

a) stabilire se e di quanto si riduce la varianza della serie ε_t^*
b) calcolare $Cov(\varepsilon_t^*, \varepsilon_{t-k}^*)$, per $k = 0, 1, 2, ...$

Soluzione

a) $RRV = \sum \theta_i^2 = \frac{1}{16} + \frac{2}{4} + \frac{1}{16} = 10/16 = 0.625$

b) - Per $h = 0$ si ha varianza

$$Var(\varepsilon_t^*) = Var(\frac{1}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_t + \frac{1}{4}\varepsilon_{t+1}) = (\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16})\sigma_\varepsilon^2 = \frac{3}{8}\sigma_\varepsilon^2$$

- Per $h = 1$ si ha:

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_t^*, \varepsilon_{t-1}^*) &= E[\varepsilon_t^*\varepsilon_{t-1}^*] = E\left[\frac{\varepsilon_{t-1} + 2\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}}{4} \cdot \frac{\varepsilon_{t-2} + 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t}{4}\right] \\ &= \frac{1}{16}E[\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + 2\varepsilon_{t-1}^2 + \varepsilon_{t-1}\varepsilon_t + 2\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} + 4\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \\ &\quad + 2\varepsilon_t^2 + \varepsilon_{t+1}\varepsilon_{t-2} + 2\varepsilon_{t+1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t+1}\varepsilon_t] \\ &= \frac{1}{16}(2\sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_\varepsilon^2) = \frac{1}{4}\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

- Per $h = 2$ si ha:

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_t^*, \varepsilon_{t-2}^*) &= E[\varepsilon_t^*\varepsilon_{t-2}^*] = E\left[\frac{\varepsilon_{t-1} + 2\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}}{4} \cdot \frac{\varepsilon_{t-3} + 2\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1}}{4}\right] \\ &= \frac{1}{16}E[\varepsilon_{t-1}^2 + zeri] = \frac{1}{16}\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

- Per $h > 2$ si ha:

$$Cov(\varepsilon_t^*, \varepsilon_{t-h}^*) = E[\varepsilon_t^*\varepsilon_{t-h}^*] = 0$$