

Analisi Matematica 1

Tema A del 27/08/2026 — svolgimento completo

Tutti i passaggi essenziali e i teoremi utilizzati sono indicati.

Domande di teoria

1. Successioni di Cauchy

Una successione (a_n) in $\mathbb{R}$ è detta *di Cauchy* se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Soluzione. La successione $a_n = (-1)^n/n$ è di Cauchy. Infatti, per $n, m \geq N$,

$$|a_n - a_m| \leq |a_n| + |a_m| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{N}.$$

Dato $\varepsilon > 0$, basta scegliere $N > 2/\varepsilon$. Equivalentemente, $a_n \rightarrow 0$ e ogni successione convergente in $\mathbb{R}$ è di Cauchy.

2. Teorema di Rolle

Enunciato. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste $c \in (a, b)$ per cui $f'(c) = 0$.

Soluzione. Per il teorema di Weierstrass, f assume in $[a, b]$ un massimo M e un minimo m .

Se $M = m$, la funzione è costante e quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Se invece $M > m$, poiché $f(a) = f(b)$, almeno uno tra il massimo e il minimo è assunto in un punto interno $c \in (a, b)$: se tutti e due fossero assunti soltanto agli estremi, l'uguaglianza dei valori agli estremi imporrebbe $M = m$.

Il punto c è dunque un estremo locale interno. Per il teorema di Fermat, essendo f derivabile in c , si ha $f'(c) = 0$. Questo conclude la prova.

3. Equazioni differenziali a variabili separabili

Un'equazione differenziale del primo ordine è a variabili separabili se può essere scritta, su opportuni intervalli, nella forma

$$y' = a(x)b(y).$$

Soluzione. Prima si cercano le soluzioni costanti: se $b(y_*) = 0$, allora $y(x) \equiv y_*$ è una soluzione.

Su un intervallo in cui $b(y) \neq 0$, si separano le variabili:

$$\frac{y'}{b(y)} = a(x).$$

Integrando rispetto a x si ottiene

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x) dx + C, \quad \text{ossia} \quad B(y) = A(x) + C.$$

Se B è localmente invertibile, la soluzione si può esplicitare come $y(x) = B^{-1}(A(x) + C)$. In presenza del dato $y(x_0) = y_0$, si può usare la forma

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{b(s)} = \int_{x_0}^x a(t) dt.$$

Vanno infine determinati gli intervalli su cui i passaggi sono validi e la soluzione rimane definita; la divisione per $b(y)$ non deve far perdere le soluzioni costanti.

4. Convessità e comportamento all'infinito

L'affermazione

$$f''(x) > 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \implies f(x) \longrightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

è falsa.

Soluzione. Un controesempio è $f(x) = e^{-x}$. Essa è due volte derivabile in $\mathbb{R}$ e

$$f''(x) = e^{-x} > 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

ma $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. L'ipotesi esprime la stretta convessità, ma non impone che la derivata diventi positiva.

Esercizio 1 — primitive e integrale definito

Poiché compare $\log x$, il dominio è $(0, +\infty)$. Dall'identità $\cos^2 u = (1 + \cos 2u)/2$ segue

$$\int \cos^2(\log x) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos(2 \log x) dx.$$

Nell'ultimo integrale poniamo $t = \log x$, che $x = e^t$ e $dx = e^t dt$. Usando

$$\int e^t \cos(2t) dt = \frac{e^t}{5} (\cos(2t) + 2 \sin(2t)) + C,$$

si ottiene

$$\int \cos^2(\log x) dx = \frac{x}{10} (5 + \cos(2 \log x) + 2 \sin(2 \log x)) + C, \quad x > 0.$$

Per l'integrale definito, una primitiva è

$$F(x) = \frac{x}{10} (5 + \cos(2 \log x) + 2 \sin(2 \log x)).$$

Poiché $\log(e^\pi) = \pi$, si ha

$$F(e^\pi) = \frac{3}{5} e^\pi, \quad F(1) = \frac{3}{5}.$$

Quindi, per il teorema fondamentale del calcolo,

$$\int_1^{e^\pi} \cos^2(\log x) dx = \frac{3}{5} (e^\pi - 1).$$

Esercizio 2 — studio di funzione

Consideriamo

$$f(x) = x + 2 \arctan |x - 1|.$$

Dominio, limiti e asintoti

Il dominio naturale è $D = \mathbb{R}$ e la funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$. Poiché $|x - 1| \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre

$$f(x) - (x + \pi) = 2 \arctan |x - 1| - \pi \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty).$$

Pertanto $y = x + \pi$ è asintoto obliquo sia a $-\infty$ sia a $+\infty$. Non vi sono asintoti verticali né orizzontali.

Derivabilità e derivata

Scrivendo il valore assoluto per casi,

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 \arctan(1-x), & x < 1, \\ x + 2 \arctan(x-1), & x \geq 1. \end{cases}$$

Per $x \neq 1$,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{1 + (1-x)^2} = \frac{x(x-2)}{1 + (x-1)^2}, & x < 1, \\ 1 + \frac{2}{1 + (x-1)^2}, & x > 1. \end{cases}$$

Nel punto $x = 1$ i rapporti incrementali laterali, equivalenti ai limiti della derivata sui due lati, danno

$$f'_-(1) = -1, \quad f'_+(1) = 3.$$

Quindi f non è derivabile in $x = 1$: il grafico presenta un punto angoloso.

Gli altri limiti notevoli della derivata sono

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 1.$$

Monotonia ed estremi

Per $x < 1$ il denominatore di f' è positivo, quindi il segno è quello di $x(x-2)$; per $x > 1$ si ha sempre $f'(x) > 0$. Ne segue

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	n.d.	+
f	$\nearrow$	max loc.	$\searrow$	min loc.	$\nearrow$

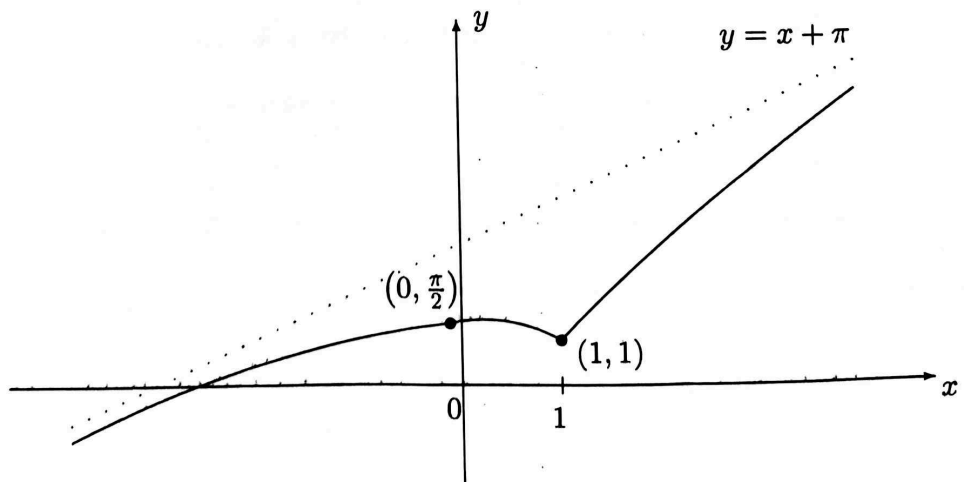
I valori degli estremi sono

$$f(0) = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}, \quad f(1) = 1.$$

Dunque $(0, \pi/2)$ è un punto di massimo locale e $(1, 1)$ è un punto di minimo locale. Non esistono estremi globali, perché f è illimitata sia inferiormente sia superiormente.

Grafico qualitativo

Il tratteggio rappresenta l'asintoto $y = x + \pi$; i due punti pieni sono gli estremi locali.



Esercizio 3 — numeri complessi

Sia

$$z_0 = \frac{1+i}{2}.$$

Allora

$$\frac{z_0 - i}{z_0} = \frac{(1-i)/2}{(1+i)/2} = \frac{1-i}{1+i} = -i,$$

e pertanto

$$\lambda = (-i)^4 = 1.$$

Per questa scelta di λ dobbiamo risolvere

$$\left(\frac{z-i}{z}\right)^4 = 1, \quad z \neq 0.$$

Poniamo $w = (z-i)/z$. Le radici quarte dell'unità sono $w \in \{1, -1, i, -i\}$. Dalla relazione $z-i = wz$ otteniamo

$$(1-w)z = i.$$

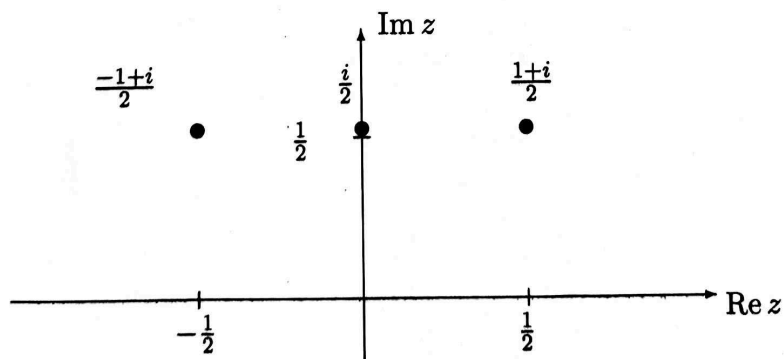
Il valore $w = 1$ è impossibile, perché darebbe $-i = 0$. Per gli altri valori:

w	$z = \frac{i}{1-w}$
-1	$\frac{i}{2}$
i	$\frac{-1+i}{2}$
$-i$	$\frac{1+i}{2}$

Quindi

$$z \in \left\{ \frac{i}{2}, \frac{-1+i}{2}, \frac{1+i}{2} \right\}.$$

Nel piano complesso i tre punti hanno tutti parte immaginaria $1/2$:



Esercizio 4 — Taylor e limite parametrico

Poniamo $L = \log 5$. Per $x \rightarrow 0$,

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^6).$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} 5^{1+\sin^2 x} &= 5 \exp(L \sin^2 x) \\ &= 5 \left[1 + L \left(x^2 - \frac{x^4}{3} \right) + \frac{L^2 x^4}{2} + O(x^6) \right]. \end{aligned}$$

Lo sviluppo di Taylor di ordine 4 è quindi

$$5^{1+\sin^2 x} = 5 + 5(\log 5)x^2 + 5 \left(\frac{(\log 5)^2}{2} - \frac{\log 5}{3} \right) x^4 + O(x^6).$$

Per il limite, il numeratore e il denominatore hanno i termini principali

$$5^{1+\sin^2 x} - 5 \sim 5(\log 5)x^2, \quad 1 - \cos(x^\alpha) \sim \frac{x^{2\alpha}}{2}.$$

Pertanto

$$\frac{5^{1+\sin^2 x} - 5}{1 - \cos(x^\alpha)} \sim 10(\log 5)x^{2-2\alpha}.$$

Poiché $x \rightarrow 0^+$ e $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5^{1+\sin^2 x} - 5}{1 - \cos(x^\alpha)} = \begin{cases} 0, & 0 < \alpha < 1, \\ 10 \log 5, & \alpha = 1, \\ +\infty, & \alpha > 1. \end{cases}$$