

# Analisi Matematica 1, 01/07/26

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ..... Docente del corso .....

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

## Tema A

**Domande di Teoria** [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

*Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.*

1. Dare la definizione di estremo inferiore per  $A \subset \mathbb{R}$  non vuoto. Dare due esempi di insieme  $A$ , uno in cui l'estremo inferiore di  $A$  sia un punto di accumulazione, e uno in cui non lo sia.

2. Enunciare e dimostrare il Teorema di Fermat.

3. Data  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \cos(x), & x \geq 0 \\ \sin(x), & x < 0 \end{cases}$ , scrivere esplicitamente  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

La  $F$  è continua? È questo coerente col teorema fondamentale del calcolo integrale?

4. Dire se la seguente disuguaglianza per numeri complessi è vera o falsa, e giustificare

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

### 1. Estremo inferiore.

Definizione: si veda le lezioni. Un esempio in cui l'estremo inferiore è punto di accumulazione è  $A = (0, 1)$ . Infatti  $\inf A = 0$ , e 0 è punto di accumulazione di  $A$ , perché ogni intorno di 0 contiene punti di  $A$  diversi da 0.

Un esempio in cui l'estremo inferiore non è punto di accumulazione è  $A = \{0\} \cup [1, 2]$ . Infatti  $\inf A = 0$  ma 0 non è punto di accumulazione di  $A$ , perché esiste un intorno di 0 che non contiene punti di  $A$  diversi da 0, ad esempio

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

### 2. Teorema di Fermat.

**Enunciato.** Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile in  $x_0 \in (a, b)$ . Se  $f$  ha in  $x_0$  un massimo locale o un minimo locale, allora  $f'(x_0) = 0$ .

**Attenzione:** se si enuncia con  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  allora  $x_0$  deve essere interno all'intervallo.

**Dimostrazione.** Si veda le lezioni.

### 3. Calcolo di $F(x)$ .

Vogliamo scrivere esplicitamente  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

Se  $x \geq 0$ , allora nell'intervallo  $[0, x]$  vale  $f(t) = \cos t$ , quindi

$$F(x) = \int_0^x \cos t dt = \sin x.$$

Se invece  $x < 0$ , allora

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = - \int_x^0 f(t) dt.$$

quindi

$$F(x) = - [-\cos t]_x^0 = - (-\cos 0 + \cos x) = 1 - \cos x.$$

Pertanto

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x < 0, \\ \sin x, & x \geq 0. \end{cases}$$

E' facile vedere la continuità in 0. Si ha  $F(0) = \sin 0 = 0$ . Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - \cos x) = 0,$$

Questo è coerente con il teorema fondamentale del calcolo integrale: infatti, anche se  $f$  non è continua in 0, è comunque limitata e integrabile su  $[-1, 1]$ . La funzione integrale  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  è continua.

#### 4. Disuguaglianza complessa.

La disuguaglianza proposta è

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Questa affermazione è falsa. Infatti prendiamo, ad esempio,  $z = 1, w = 1$ . Allora

$$|z + w|^2 = |1 + 1|^2 = |2|^2 = 4,$$

mentre

$$|z|^2 + |w|^2 = |1|^2 + |1|^2 = 1 + 1 = 2.$$

**Nota.** La formula corretta (cf. disuguaglianza triangolare fatta a lezione) è

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}).$$

Quindi la disuguaglianza

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2$$

vale solo quando

$$\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq 0.$$

(che in effetti non e' mai verificata se  $z, w$  sono due numeri reali entrambi positivi).



Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ..... Docente del corso .....

**Nota:** nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

## Tema A

### Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

(A) Determinare l'insieme delle primitive seguenti

$$\int x e^{-x} \cos(x) dx$$

*Indicazione: si può iniziare calcolando  $\int e^{-x} \cos(x) dx$*

(B) Calcolare quindi il limite della successione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n x e^{-x} \cos(x) dx$$

Iniziamo calcolando  $\int e^{-x} \cos(x) dx$ . Integrando per parti due volte, otteniamo

$$\int e^{-x} \cos(x) dx = \frac{e^{-x}}{2} (-\cos(x) + \sin(x)).$$

Ora integriamo per parti:

$$\int x e^{-x} \cos(x) dx.$$

Poniamo  $u = x$ ,  $v' = e^{-x} \cos(x)$ . Quindi

$$\int x e^{-x} \cos(x) dx = x \frac{e^{-x}}{2} (\sin(x) - \cos(x)) - \int \frac{e^{-x}}{2} (\sin(x) - \cos(x)) dx.$$

Calcoliamo l'integrale rimanente:

$$\int \frac{e^{-x}}{2} (\sin(x) - \cos(x)) dx = \frac{1}{2} \int e^{-x} \sin(x) dx - \frac{1}{2} \int e^{-x} \cos(x) dx.$$

Si ha

$$\int e^{-x} \sin(x) dx = \frac{e^{-x}}{2} (-\sin(x) - \cos(x)),$$

e

$$\int e^{-x} \cos(x) dx = \frac{e^{-x}}{2} (\sin(x) - \cos(x)).$$

Dunque

$$\int \frac{e^{-x}}{2} (\sin(x) - \cos(x)) dx = -\frac{e^{-x}}{2} \sin(x).$$

Pertanto

$$\int x e^{-x} \cos(x) dx = \frac{x e^{-x}}{2} (\sin(x) - \cos(x)) + \frac{e^{-x}}{2} \sin(x) + C.$$

Quindi

$$\int x e^{-x} \cos(x) dx = \frac{e^{-x}}{2} ((x+1) \sin(x) - x \cos(x)) + C$$

con  $C \in \mathbb{R}$ . Dobbiamo calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n x e^{-x} \cos(x) dx.$$

Usiamo la primitiva trovata:

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{2} ((x+1) \sin(x) - x \cos(x)).$$

Allora

$$\int_0^n x e^{-x} \cos(x) dx = F(n) - F(0).$$

Calcoliamo  $F(0)$ :

$$F(0) = \frac{e^0}{2} ((0+1) \sin(0) - 0 \cos(0)) = 0.$$

Quindi

$$\int_0^n x e^{-x} \cos(x) dx = \frac{e^{-n}}{2} ((n+1) \sin(n) - n \cos(n)).$$

Ora osserviamo che

$$|(n+1) \sin(n) - n \cos(n)| \leq (n+1) |\sin(n)| + n |\cos(n)| \leq 2n+1.$$

Pertanto

$$\left| \frac{e^{-n}}{2} ((n+1) \sin(n) - n \cos(n)) \right| \leq \frac{e^{-n}}{2} (2n+1).$$

Poiché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} (2n+1) = 0,$$

per il teorema del confronto otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n}}{2} ((n+1) \sin(n) - n \cos(n)) = 0.$$



**Esercizio 2** [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{|x|}{x+1} e^{\arctan(x)}$$

**Dominio e segno**

La funzione è definita per  $x+1 \neq 0$ . Poiché c'è il valore assoluto, scriviamo la funzione per casi:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1} e^{\arctan x}, & x < 0, \ x \neq -1, \\ \frac{x}{x+1} e^{\arctan x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Poiché  $e^{\arctan x} > 0$  per ogni  $x$ , il segno dipende da

$$\frac{|x|}{x+1}.$$

Si ha  $f(0) = 0$  e inoltre

$$f(x) < 0 \quad \text{se } x < -1, \quad f(x) > 0 \quad \text{se } x > -1, \ x \neq 0,$$

**Limiti e asintoti**

Siccome  $e^{\arctan x}$  resta limitato e positivo per  $x \rightarrow -1$  si vede facilmente

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$$

Quindi  $x = -1$  è un asintoto verticale. Ora studiamo i limiti all'infinito. Per  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{|x|}{x+1} = \frac{x}{x+1} \rightarrow 1, \quad e^{\arctan x} \rightarrow e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Con questo e ragionamento analogo a  $-\infty$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{\frac{\pi}{2}}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Notiamo che  $f$  è continua su tutto il dominio  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

**Derivata prima**

Per  $x > 0$ , si ha

$$f(x) = \frac{x}{x+1} e^{\arctan x}.$$

Derivando:

$$f'(x) = e^{\arctan x} \left[ \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x}{x+1} \frac{1}{1+x^2} \right].$$

Quindi

$$f'(x) = \frac{e^{\arctan x} (2x^2 + x + 1)}{(x+1)^2 (1+x^2)}.$$

Con calcoli analoghi (per  $x < 0$  la funzione è l'opposta e  $(-h(x))' = -h'(x)$ )

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{e^{\arctan x} (2x^2 + x + 1)}{(x+1)^2 (1+x^2)}, & x < 0, \ x \neq -1, \\ \frac{e^{\arctan x} (2x^2 + x + 1)}{(x+1)^2 (1+x^2)}, & x > 0. \end{cases}$$

Osserviamo che

$$2x^2 + x + 1 > 0$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , perché il discriminante è  $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ . Quindi

$$f'(x) < 0 \quad \text{per } x < 0, \quad x \neq -1, \quad f'(x) > 0 \quad \text{per } x > 0.$$

Calcoliamo le derivate laterali in  $x = 0$  si vede che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1.$$

quindi la funzione non è derivabile in  $x = 0$ , dove c'è un punto angoloso di minimo relativo. Non ci sono massimi o minimi assoluti, perché la funzione è illimitata sia inferiormente sia superiormente.

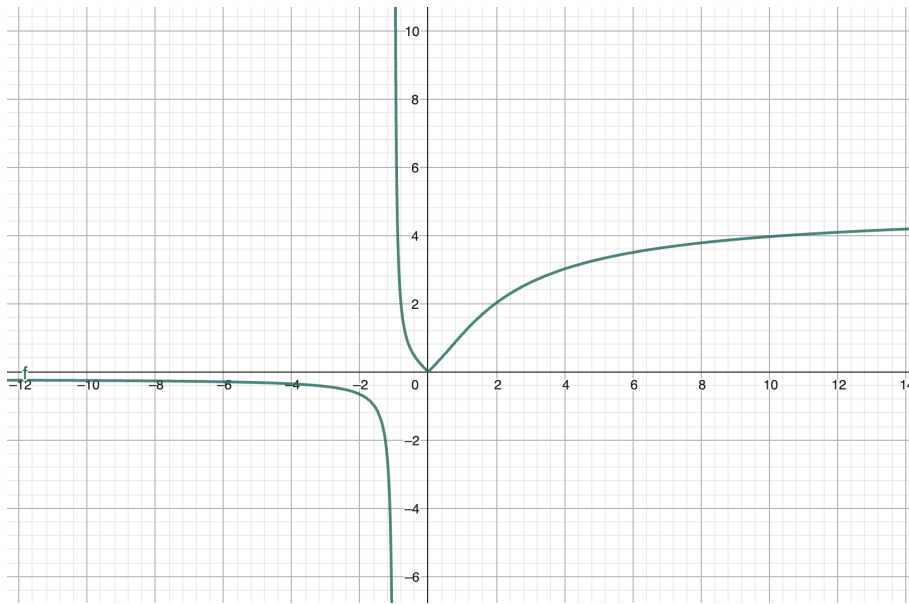


Figure 1: Grafico della funzione

### Esercizio 3 [con svolgimento, 4 punti]

Si consideri l'equazione

$$y''(x) + Ky'(x) + 4y(x) = \cos(2x). \quad (1)$$

(a) Determinare  $K \in \mathbb{R}$  in modo che la funzione  $y(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$  sia soluzione dell'equazione (1).

(b) Per tale valore di  $K$ , scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y''(x) + Ky'(x) + 4y(x) = \cos(2x).$$

(c) La soluzione  $y(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$  trovata al punto (a) soddisfa  $y(0) = y(\pi) = 0$ . Ce ne sono altre?

Vogliamo determinare  $K \in \mathbb{R}$  in modo che  $y(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$  sia soluzione dell'equazione. Calcoliamo le derivate:

$$y'(x) = \cos(2x), \quad y''(x) = -2 \sin(2x).$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$-2 \sin(2x) + K \cos(2x) + 2 \sin(2x) = \cos(2x).$$

Pertanto deve essere  $\boxed{K = 1}$ . Per  $K = 1$ , l'equazione diventa

$$y''(x) + y'(x) + 4y(x) = \cos(2x).$$

Una soluzione particolare è già data da  $y_p(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$ . Ora risolviamo l'equazione omogenea associata:

$$y'' + y' + 4y = 0.$$

L'equazione caratteristica è  $\lambda^2 + \lambda + 4 = 0$ . Il discriminante è  $\Delta = 1 - 16 = -15$ . Quindi

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}.$$

Dunque l'integrale generale dell'equazione completa è

$$\boxed{y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left( C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right) \right) + \frac{1}{2} \sin(2x),}$$

con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Vogliamo capire se esistono altre soluzioni che soddisfano

$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

Imponiamo la condizione  $y(0) = 0$ . Si ha  $y(0) = C_1$ . Quindi  $C_1 = 0$ . Ora imponiamo  $y(\pi) = 0$ . Si ha

$$y(\pi) = C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\pi\right) + \frac{1}{2} \sin(2\pi).$$

Poiché  $\sin(2\pi) = 0$  otteniamo

$$C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\pi\right) = 0.$$

Ora  $e^{-\frac{\pi}{2}} \neq 0$ . Inoltre  $\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\pi\right) \neq 0$ , perché  $\frac{\sqrt{15}}{2}$  non è un numero intero. Dunque deve essere  $C_2 = 0$ .

Quindi l'unica soluzione che soddisfa  $y(0) = y(\pi) = 0$  è  $y(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$ .

**Esercizio 4** [con svolgimento, 6 punti]

(A) Determinare il polinomio di Taylor di grado 4 in  $x = 0$  della funzione

$$f(x) = \sin(\ln(x+1)) - \sin(x)$$

(B) Calcolare per  $\alpha > 0$  il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\ln(x+1)) - \sin(x)}{x^\alpha \arctan(\ln(x^2+1))}$$

Usiamo gli sviluppi notevoli:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4), \quad \sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4).$$

Poniamo  $t = \ln(1+x)$ . Allora

$$t = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

Calcoliamo ora  $t^3$  fino all'ordine 4. Poiché  $t^3 = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3$ , si ha

$$t^3 = x^3 + 3x^2 \left(-\frac{x^2}{2}\right) + o(x^4) = x^3 - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4).$$

Pertanto

$$\frac{t^3}{6} = \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

Sostituendo gli sviluppi trovati:

$$\sin(\ln(1+x)) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) - \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4}\right) + o(x^4).$$

Quindi il termine di ordine 4 si semplifica

$$\sin(\ln(1+x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Pertanto  $f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \sin x$  diventa

$$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

Ora studiamo il denominatore. Poiché

$$\ln(1+x^2) = x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+, \quad \arctan y = y + o(y) \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

si ha

$$\arctan(\ln(1+x^2)) = x^2 + o(x^2).$$

Quindi

$$x^\alpha \arctan(\ln(1+x^2)) = x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2}).$$

Pertanto

$$\frac{\sin(\ln(1+x)) - \sin(x)}{x^\alpha \arctan(\ln(1+x^2))} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2})} = \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{x^\alpha + o(x^\alpha)}$$

Poiché  $\alpha > 0$  e  $x \rightarrow 0^+$ , si ha  $x^\alpha \rightarrow 0^+$ , quindi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\ln(x+1)) - \sin(x)}{x^\alpha \arctan(\ln(x^2+1))} = -\infty \quad \forall \alpha > 0.}$$