

Analisi Matematica 1, 17/06/26

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.

1. Enunciare il principio di induzione e usarlo per dimostrare che la successione per ricorrenza

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$$

soddisfa le disugugalianze $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange
3. Enunciare il teorema di Taylor
4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile tale che $f(0) = 1$ e $f(2) = 1$. Dire se l'affermazione seguente e' vera o falsa e giustificare

esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x^2$

Analisi Matematica 1, 17/06/26

Parte di esercizi.

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **120 minuti**.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 5 punti]

(A) Determinare l'insieme delle primitive

$$\int \sin(\log^2(x)) \frac{\log(x)}{x} dx$$

(B) Determinare tutte le soluzioni di

$$y' = (y + 1) \sin(\log^2(x)) \frac{\log(x)}{x}$$

e poi la soluzione al problema di Cauchy con condizione iniziale $y(1) = 0$.

(A) Poniamo

$$t = \log^2 x.$$

Allora

$$dt = 2 \log x \frac{1}{x} dx,$$

quindi

$$\frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{2} dt.$$

Pertanto

$$\int \sin(\log^2 x) \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + C.$$

Ritornando alla variabile x , otteniamo

$$\boxed{\int \sin(\log^2 x) \frac{\log x}{x} dx = -\frac{1}{2} \cos(\log^2 x) + C}$$

con $x > 0$.

(B) L'equazione è a variabili separabili. Scriviamo

$$\frac{dy}{y+1} = \sin(\log^2 x) \frac{\log x}{x} dx$$

Se $y \neq -1$, integrando si ha

$$\int \frac{y'}{y+1} dx = \int \sin(\log^2 x) \frac{\log x}{x} dx.$$

Quindi

$$\log |y+1| = -\frac{1}{2} \cos(\log^2 x) + C.$$

Esponenziando,

$$|y+1| = e^C e^{-\frac{1}{2} \cos(\log^2 x)}.$$

Assorbendo il segno nella costante, otteniamo

$$y+1 = C e^{-\frac{1}{2} \cos(\log^2 x)}.$$

Dunque

$$y(x) = Ce^{-\frac{1}{2} \cos(\log^2 x)} - 1$$

con $C \in \mathbb{R}$. Questa famiglia comprende anche la soluzione costante

$$y(x) = -1$$

per $C = 0$. Ora imponiamo la condizione iniziale

$$y(1) = 0.$$

Poiché

$$\log 1 = 0,$$

si ha

$$0 = Ce^{-\frac{1}{2} \cos 0} - 1.$$

Ma

$$\cos 0 = 1,$$

quindi

$$0 = Ce^{-1/2} - 1.$$

Da cui

$$C = e^{1/2}.$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \cos(\log^2 x)} - 1 = e^{\frac{1 - \cos(\log^2 x)}{2}} - 1$$

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = e^{-1+x \log |x|}$$

• Dominio, limiti notevoli e asintoti.

Il dominio naturale e' $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Studiamo i limiti principali. Per $x \rightarrow 0^\pm$, sappiamo che

$$x \log |x| \rightarrow 0.$$

Quindi $-1 + x \log |x| \rightarrow -1$, e pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{-1}.$$

Dunque in $x = 0$ la funzione non e' definita, ma ha una discontinuita' eliminabile.

Per $x \rightarrow +\infty$, si ha $x \log x \rightarrow +\infty$, quindi $-1 + x \log x \rightarrow +\infty$ e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Per $x \rightarrow -\infty$, ponendo $|x| = -x$, si ha $x \log |x| \rightarrow -\infty$, quindi $-1 + x \log |x| \rightarrow -\infty$ e dunque

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Quindi la funzione ha un asintoto orizzontale a sinistra:

$$y = 0 \quad \text{per } x \rightarrow -\infty.$$

Non ci sono asintoti verticali, perche' $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = e^{-1}$ e' finito.

• Derivabilita' e calcolo della derivata.

La funzione e' derivabile in tutto il suo dominio, cioe' in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Poniamo

$$g(x) = -1 + x \log |x|.$$

Allora

$$f(x) = e^{g(x)}.$$

Calcoliamo

$$g'(x) = \frac{d}{dx} (-1 + x \log |x|).$$

Poiche'

$$\frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx} \log(-x) = \frac{1}{x},$$

si ottiene

$$g'(x) = \log |x| + x \cdot \frac{1}{x} = \log |x| + 1.$$

Dunque per ogni $x \neq 0$

$$f'(x) = e^{-1+x \log |x|} (\log |x| + 1)$$

Studiamo i limiti notevoli della derivata in $x = 0$. Poiche'

$$e^{-1+x \log |x|} \rightarrow e^{-1}, \quad \log |x| + 1 \rightarrow -\infty,$$

segue che

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty}, \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty}.$$

Inoltre,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

• **Segno della derivata, monotonia ed estremi locali.**

Poichè $e^{-1+x \log |x|} > 0$ per ogni $x \neq 0$, il segno di $f'(x)$ dipende solo da $\log |x| + 1$.

Studiamo quindi

$$\log |x| + 1 > 0. \quad \Leftrightarrow \quad |x| > e^{-1}.$$

Dunque

$$f'(x) > 0 \iff |x| > \frac{1}{e}.$$

Quindi i punti critici sono

$$\boxed{x = -\frac{1}{e}} \quad \text{e} \quad \boxed{x = \frac{1}{e}}.$$

Riassumendo il segno di f' :

x	$(-\infty, -\frac{1}{e})$	$-\frac{1}{e}$	$(-\frac{1}{e}, 0)$	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$
$(\frac{1}{e}, +\infty)$					
$f'(x)$	+	0	-	-	0
+					

Studiamo ora il comportamento della derivata vicino al punto di non derivabilit $x = 0$. Poichè

$$x \log |x| \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0^\pm,$$

si ha

$$e^{-1+x \log |x|} \rightarrow e^{-1}.$$

Inoltre

$$\log |x| + 1 \rightarrow -\infty \quad \text{per } x \rightarrow 0^\pm.$$

Pertanto

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty} \quad \text{e} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty}.$$

Quindi in $x = 0$ la funzione non è derivabile, e la derivata esplode a $-\infty$ da entrambi i lati.

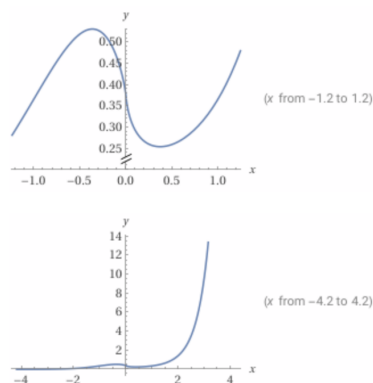


Figure 1: Studio della funzione

Esercizio 3 [con svolgimento, 5 punti]

Calcolare l'integrale

$$\int_2^3 \frac{1}{e^{2x} + e^x - 2} dx$$

Poniamo

$$t = e^x.$$

Allora

$$dt = e^x dx = t dx, \quad dx = \frac{dt}{t}.$$

Inoltre

$$e^{2x} + e^x - 2 = t^2 + t - 2 = (t+2)(t-1).$$

Gli estremi diventano

$$x = 2 \Rightarrow t = e^2, \quad x = 3 \Rightarrow t = e^3.$$

Quindi

$$\int_2^3 \frac{1}{e^{2x} + e^x - 2} dx = \int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{t(t+2)(t-1)} dt.$$

Scomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{1}{t(t+2)(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{t-1}.$$

Allora

$$1 = A(t+2)(t-1) + Bt(t-1) + Ct(t+2).$$

Ponendo $t = 0$, otteniamo

$$1 = -2A, \quad A = -\frac{1}{2}.$$

Ponendo $t = -2$, otteniamo

$$1 = 6B, \quad B = \frac{1}{6}.$$

Ponendo $t = 1$, otteniamo

$$1 = 3C, \quad C = \frac{1}{3}.$$

Pertanto

$$\frac{1}{t(t+2)(t-1)} = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{6(t+2)} + \frac{1}{3(t-1)}.$$

Dunque

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{t(t+2)(t-1)} dt = \left[-\frac{1}{2} \log t + \frac{1}{6} \log(t+2) + \frac{1}{3} \log(t-1) \right]_{e^2}^{e^3}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{e^{2x} + e^x - 2} dx &= -\frac{1}{2} \log(e^3) + \frac{1}{6} \log(e^3 + 2) + \frac{1}{3} \log(e^3 - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \log(e^2) - \frac{1}{6} \log(e^2 + 2) - \frac{1}{3} \log(e^2 - 1). \end{aligned}$$

Poiche'

$$-\frac{1}{2} \log(e^3) + \frac{1}{2} \log(e^2) = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2},$$

otteniamo

$$\boxed{\int_2^3 \frac{1}{e^{2x} + e^x - 2} dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \log\left(\frac{e^3 + 2}{e^2 + 2}\right) + \frac{1}{3} \log\left(\frac{e^3 - 1}{e^2 - 1}\right)}$$

Esercizio 4 [con svolgimento, 6 punti]

Calcolare al variare di $\gamma > 0$ il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - \sinh x)^2 - x^\gamma}{\cos(4x) - 1 + x^{7/3} \log x}.$$

Usiamo gli sviluppi di Taylor per $x \rightarrow 0^+$: $\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Quindi

$$x - \sinh x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \Rightarrow \quad (x - \sinh x)^2 = \frac{x^6}{36} + o(x^6).$$

Per il denominatore abbiamo

$$\cos(4x) = 1 - \frac{(4x)^2}{2} + o(x^2) = 1 - 8x^2 + o(x^2).$$

Inoltre vale che $x^{7/3} \log x = o(x^2)$, perche'

$$\frac{x^{7/3} \log x}{x^2} = x^{1/3} \log x \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Pertanto

$$\cos(4x) - 1 + x^{7/3} \log x = -8x^2 + o(x^2).$$

Il limite diventa quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^6}{36} + o(x^6) - x^\gamma}{-8x^2 + o(x^2)}.$$

Caso 1: $0 < \gamma < 2$.

In questo caso $\gamma < 6$ quindi il termine dominante al numeratore e' $-x^\gamma$. Quindi

$$\frac{(x - \sinh x)^2 - x^\gamma}{\cos(4x) - 1 + x^{7/3} \log x} = \frac{-x^\gamma + o(x^\gamma)}{-8x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{8} x^{\gamma-2} + o(x^{\gamma-2}).$$

Poiche' $\gamma - 2 < 0$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - \sinh x)^2 - x^\gamma}{\cos(4x) - 1 + x^{7/3} \log x} = +\infty.$$

Caso 2: $\gamma = 2$.

Ancora $\gamma < 6$ quindi il termine dominante al numeratore e' $-x^\gamma$. Allora per $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{(x - \sinh x)^2 - x^2}{\cos(4x) - 1 + x^{7/3} \log x} = \frac{-x^2 + o(x^2)}{-8x^2 + o(x^2)} \rightarrow \frac{1}{8}.$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - \sinh x)^2 - x^2}{\cos(4x) - 1 + x^{7/3} \log x} = \frac{1}{8}.$$

Caso 3: $\gamma > 2$.

Se $2 < \gamma$, il numeratore e' $o(x^2)$, percio'

$$\frac{(x - \sinh x)^2 - x^\gamma}{\cos(4x) - 1 + x^{7/3} \log x} = \frac{o(x^2)}{-8x^2 + o(x^2)} \rightarrow 0.$$

In conclusione,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - \sinh x)^2 - x^\gamma}{\cos(4x) - 1 + x^{7/3} \log x} = \begin{cases} +\infty, & 0 < \gamma < 2, \\ \frac{1}{8}, & \gamma = 2, \\ 0, & \gamma > 2. \end{cases}$$