

$$① \quad f(x) = (\cos x - e^x)^3$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos x - e^x = -x - x^2 + o(x^2)$$

da cui

$$\begin{aligned} (\cos x - e^x)^3 &= (-x - x^2 + o(x^2))^3 \\ &= -x^3 (1 + x + o(x))^3 \\ &= -x^3 (1 + 3x + o(x)) \\ &= -x^3 - 3x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

dove si è usato lo sviluppo

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t). \quad (*)$$

(lo stesso calcolo si può fare senza usare $(*)$, che però è utile per)

$$\begin{aligned} (\sin x)^\alpha &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^\alpha \\ &= x^\alpha \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)^\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^\alpha \left(1 - \alpha \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)^\alpha \\
&= x^\alpha - \alpha \frac{x^{\alpha+2}}{6} + o(x^{\alpha+2})
\end{aligned}$$

quindi

$$(\sin x)^\alpha - x^\alpha = -\frac{\alpha}{6} x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2})$$

da cui $c = -\frac{\alpha}{6}$ $\gamma = \alpha + 2$.

In fine si può notare che

$$\forall x > 0 \quad |\cos(\log x)| \leq 1$$

dunque $x^4 \cos(\log x) = o(x^3)$

(infatti $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 \cos(\log x)}{x^3} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cos(\log x) = 0$$

perché $0 \leq |x \cos(\log x)| \leq |x|$.)

Si può concludere

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)^\alpha - x^\alpha}{x^4 \ln(\log x) + (\cos x - e^x)^3}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{\alpha}{6} x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2})}{-x^3 + o(x^3)}$$

$$= \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ \frac{\alpha}{6} = \frac{1}{6} & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & 0 < \alpha < 1 \end{cases} .$$

② Studiare $f(x) = \log(e^x + \frac{|x|}{e})$

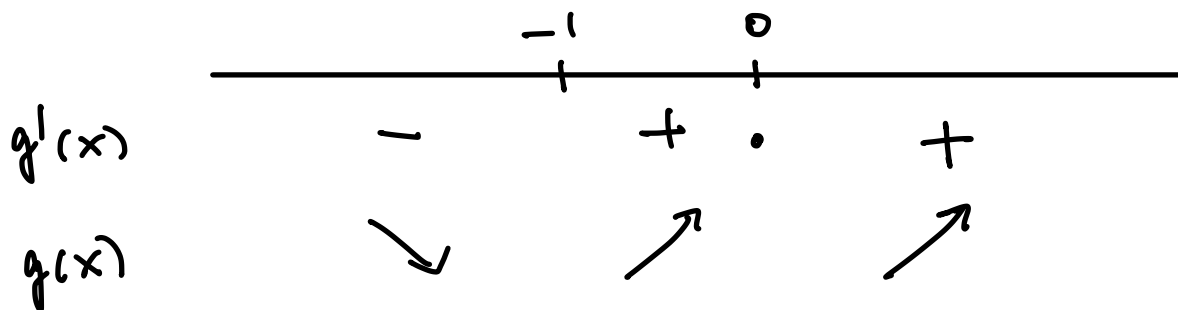
Notiamo $f(x) = \log(g(x))$, con $D = \mathbb{R}$
essendo $g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = e^x + \frac{|x|}{e} = \begin{cases} e^x + \frac{x}{e} & x \geq 0 \\ e^x - \frac{x}{e} & x < 0 \end{cases}$$

notiamo $g(0) = e^0 = 1$

Poi $g'(x) = \begin{cases} e^x + \frac{1}{e} & x \geq 0 \\ e^x - \frac{1}{e} & x < 0 \end{cases}$

Notiamo che la derivata si annulla $x = -1$



Essendo $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \log(g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ ← positivo

$f(x)$ ha la stessa monotonia.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\underbrace{e^x + \frac{|x|}{e}}_{+\infty} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left(\underbrace{e^x + \frac{|x|}{e}}_{+\infty} \right) = +\infty$$

Asintoto obliquo: osservando che

$$\begin{aligned} \log \left(e^x + \frac{|x|}{e} \right) &= \log \left(e^x \left(1 + \frac{|x|}{e^{x+1}} \right) \right) \\ &= x + \log \left(1 + \frac{|x|}{e^{x+1}} \right) \end{aligned}$$

si vede velocemente che

-) per $x \rightarrow +\infty$ $h(x) = x$ asintoto obliquo
-) per $x \rightarrow -\infty$ non c'è asintoto obliq.

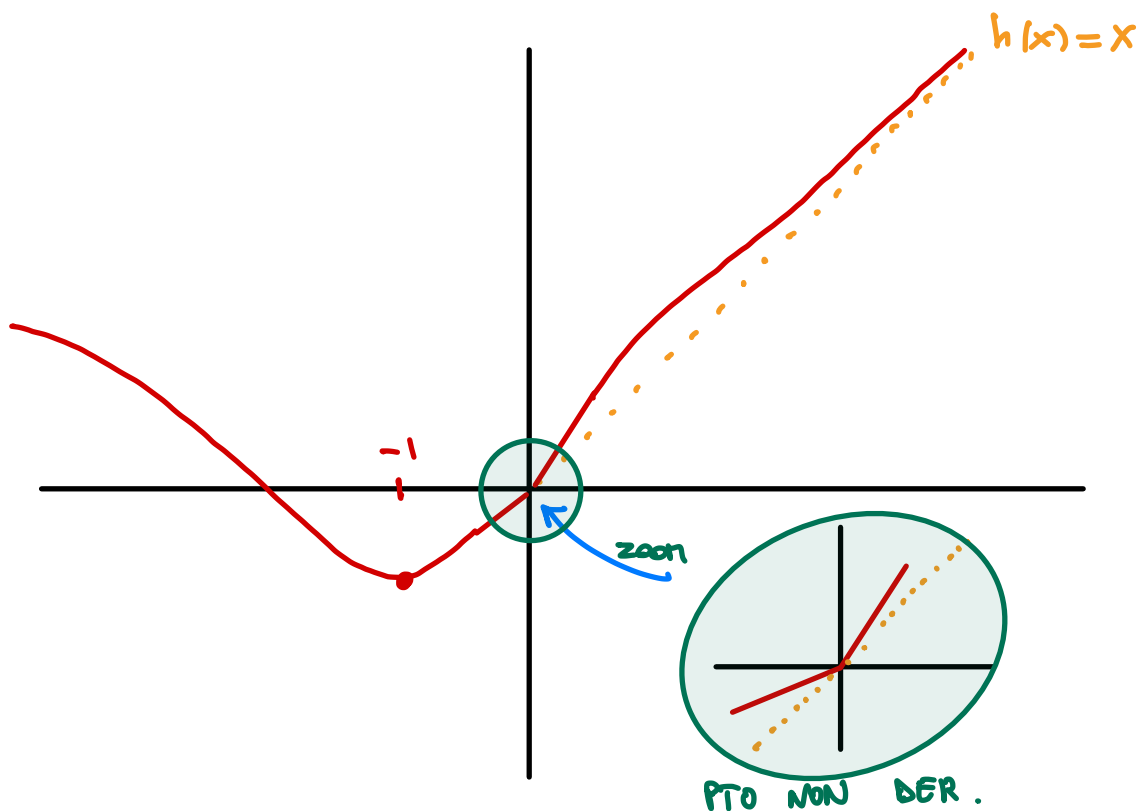
$$\begin{aligned} \text{Notiamo che } g(-1) &= \log \left(e^{-1} + \frac{1}{e} \right) \\ &= \log \left(\frac{2}{e} \right) < 0 \end{aligned}$$

$$\frac{2}{e} < 1$$

In fine $x=0$ punto di non derivabilità
in quanto: (limiti diversi).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \frac{1}{e}}{e^x + \frac{x}{e}} = 1 + \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g'(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - \frac{1}{e}}{e^x + \frac{1}{e}} = 1 - \frac{1}{e}$$



altri temi

Caso $f(x) = \log(e^{-x} + \frac{|x|}{e})$
simmetrico rispetto asse y.

Casi $f(x) = \log(e^x - \frac{|x|}{e})$ $D =]-1, +\infty[$
opp. $= \log(e^{-x} - \frac{|x|}{e})$ $D =]-\infty, 1[$.

calcoli simili ma dominio notando
che questa volta la funzione ha derivata
di segno costante ma

$g(x) = e^x - \frac{|x|}{e}$ si annulla in $x = -1$

$g(x) = e^{-x} - \frac{|x|}{e}$ " " " $x = 1$.

3

Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$: $z = 1-i$
soluzione di

$$z^2 |z|^2 - \lambda \bar{z} = 0 \quad (*)$$

(*)

Si può notare che $z=0$ è sempre una
soluzione, e moltiplicando (*) per z
uno ottiene (per $z \neq 0$)

$$z^3 |z|^2 - \lambda |z|^2 = 0$$

cioè

$$z^3 = \lambda$$

si può (*)
fare anche
con calcolo
diretto!

$$\begin{aligned} \text{Quindi} \quad \lambda &= (1-i)^3 \\ &= 1^3 - 3i + 3i^2 - i^3 \end{aligned}$$

$$\text{da cui} \quad \lambda = -2 - 2i$$

$$\text{Ora per risolvere} \quad z^3 = -2 - 2i$$

$$\begin{aligned} \text{noto} \quad -2 - 2i &= 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= 2\sqrt{2} e^{-\frac{3}{4}\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{da cui} \quad z &= \sqrt{2} e^{i\theta} \quad \text{con} \quad 3\theta = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \quad k=0,1,2. \\ \theta &= -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi \end{aligned}$$

4

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} dx \Rightarrow \int \frac{t}{t^2+1} 2t dt .$$

$$t = \sqrt{x+1}$$

$$t^2 = x+1$$

$$2t dt = dx$$

$$= 2 \int \frac{t^2}{t^2+1} dt .$$

aggiungo e tolgo
1

$$= 2 \int \frac{t^2+1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$= 2(t - \arctan t + c)$$

la costante è arbitraria
quindi può stare sia
dentro che fuori la
parentesi.

$$\Rightarrow F(x) = 2\sqrt{x+1} - 2\arctan \sqrt{x+1} + c .$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= F(2) - F(0) \\ &= 2\sqrt{3} - 2\arctan \sqrt{3} - 2 - 2\arctan(1) \\ &= 2(\sqrt{3}-1) - 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) . \\ &= 2(\sqrt{3}-1) - \frac{\pi}{6} . \end{aligned}$$

L'equazione differenziale

$$u' = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \sqrt{u}$$

$$2 \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} dx$$

$$\Rightarrow 2 \sqrt{u} = 2 \left(\sqrt{x+1} - \arctan \sqrt{x+1} + c \right).$$

$$u(0)=1 \Rightarrow 2 = 2 \left(1 - \frac{\pi}{4} + c \right)$$

$$1 = 1 - \frac{\pi}{4} + c \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}.$$

$$u(x) = \left(\sqrt{x+1} - \arctan \sqrt{x+1} + \frac{\pi}{4} \right)^2.$$

DOMANDE DI TEORIA

② e ④ vedere lezioni

① Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto

$\mu \in \mathbb{R}$ si dice estremo inferiore se
in $\mathbb{R}$ • $\mu \leq x \quad \forall x \in A$ minore uguale!

• $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A: \mu + \varepsilon > x$

$m \in A$ si dice minimo di A se
in A • $m \leq x \quad \forall x \in A$

se A ammette minimo $\Rightarrow \min A = \inf A$

In fatti supponiamo $\min A = m$
per assurdo $\inf A = \mu$ con $m \neq \mu$

La prima condizione per μ con $x = m$
dice $\mu \leq m$. Quindi $\mu < m$.

D'altra parte $\forall \varepsilon > 0$ abbiamo $\exists x \in A$

$\mu + \varepsilon > x \geq m \Rightarrow \mu \geq m$
 $\uparrow$ perché m minimo ASSURDO.

3) 2) VERA.

Infatti se $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = l$

$$\text{allora } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = l$$

come conseguenza del teorema di Lagrange

$$\text{sia } x > 0. \quad f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(\xi)$$

ma $0 < \xi < x$ quindi $\xi \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$.

Analogamente per $x < 0$.

visto in aula!

B) Falso. Esempio: $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ non esiste ma

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

donc f derivabile e $f'(0) = 0$.