

Analisi Matematica 1, 12/02/26

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.

1. Per $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto, dare la definizione di estremo inferiore e di minimo di A .
Dimostrare che se A ammette minimo, allora l'estremo inferiore coincide col minimo.
2. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale
3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, e sia f derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dire se le seguenti affermazione sono vere o false e giustificare:
 - a) se $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ allora f è derivabile in $x = 0$ e vale $f'(0) = \ell$.
 - b) se $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ non esiste allora f non è derivabile in $x = 0$.
4. Enunciare il teorema del confronto asintotico (o del rapporto) per successioni reali $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Analisi Matematica 1, 12/02/26

Parte di esercizi.

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

(i) Scrivere lo sviluppo di Taylor di grado 4 in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = (\cos x - e^x)^3$$

(ii) Dato $\alpha > 0$, trovare $c \neq 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che per $x \rightarrow 0^+$ valga

$$(\sin x)^\alpha - x^\alpha = cx^\gamma + o(x^\gamma)$$

(iii) Calcolare in funzione di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)^\alpha - x^\alpha}{x^4 \cos(\log x) + (\cos x - e^x)^3}$$

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \log \left(e^x - \frac{|x|}{e} \right)$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f , i *limiti notevoli* di f , gli eventuali asintoti **orizzontali**, **verticali** ed **obliqui**, studiando se necessario prima $g(x) = e^x - \frac{|x|}{e}$.

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, i *limiti notevoli* della derivata: (cioè i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità)

- il segno della derivata, gli intervalli di monotonia di f , i punti di estremo locale e la loro natura:

- tracciare il grafico qualitativo di f :

usare questo spazio per eventuali calcoli supplementari: indicare l'esercizio

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

- 1) Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $z = 1 - i$ sia soluzione di

$$z^2|z|^2 - \lambda\bar{z} = 0$$

- 2) Determinare tutte le soluzioni complesse della equazione precedente per la scelta di λ e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

Esercizio 4 [con svolgimento, 6 punti]

(A) Determinare il valore del seguente integrale

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} dt$$

(B) Determinare la soluzione $u(x)$ della equazione differenziale

$$u' = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \sqrt{u},$$

che soddisfa la condizione iniziale $u(0) = 1$