

$$\textcircled{1} \quad \int \sin(2x) \log(\sin x) dx = (*)$$

$$\text{Pongo } u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$\text{ed essendo } \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$(*) = 2 \int u \log u du$$

che si può fare per parti.

$$\begin{aligned} 2 \int u \log u du &= u^2 \log u - \int u^2 \cdot \frac{1}{u} du \\ &= u^2 \log u - \frac{u^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{da cui } F(x) = \sin^2 x \log(\sin x) - \frac{1}{2} \sin^2 x + c$$

$$\text{per avere } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{serve} \quad c = \frac{1}{2}$$

$$\text{in quanto } \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

(B) calcolo i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(2x) \log(\sin x)$$

pongo $y = \sin x$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} 2y \sqrt{1-y^2} \log y$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} 2y \log y = 0$$

in quanto $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y}{e^{-y}} = 0$

$y = \log x$

mentre $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin(2x) \log(\sin x)$

$(y = \pi - x)$ $= \lim_{y \rightarrow 0^+} \sin(2\pi - 2y) \log(\sin(\pi - y))$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} -\sin(2y) \log(\sin(y))$$

$$= 0$$

quando $\sin(2\pi - 2y) = \sin(-2y) = -\sin(2y)$
 $\sin(\pi - y) = \sin(y)$.

Ne segue che f non può estendersi per
continuità su $[0, \pi]$ ponendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \text{ oppure } x=\pi \\ f(x) & x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

② $f(x) = (|x| + |x-1|) e^{-1/x}$

Osservo che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \neq 0$
e $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dominio di f .

Posso scrivere

$$f(x) = \begin{cases} (2x-1) e^{-1/x} & x > 1 \\ e^{-1/x} & 0 < x < 1 \\ (-2x+1) e^{-1/x} & x < 0 \end{cases}$$

noto che su $] -\infty, 0[$ la $f(x)$ ha espress.
opposta che su $] 1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(2x-1)}_{\downarrow +\infty} \underbrace{e^{-1/x}}_{\downarrow 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{(-2x+1)}_{+\infty} \underbrace{e^{-1/x}}_1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{(-2x+1)}_1 \underbrace{e^{-1/x}}_{+\infty} = +\infty.$$

Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} (2x-1) e^{\frac{1}{x}} & x > 1 \\ \frac{1}{x^2} e^{-1/x} & 0 < x < 1 \\ \text{e' opposto della prima riga} & x < 0. \end{cases}$$

ovvero

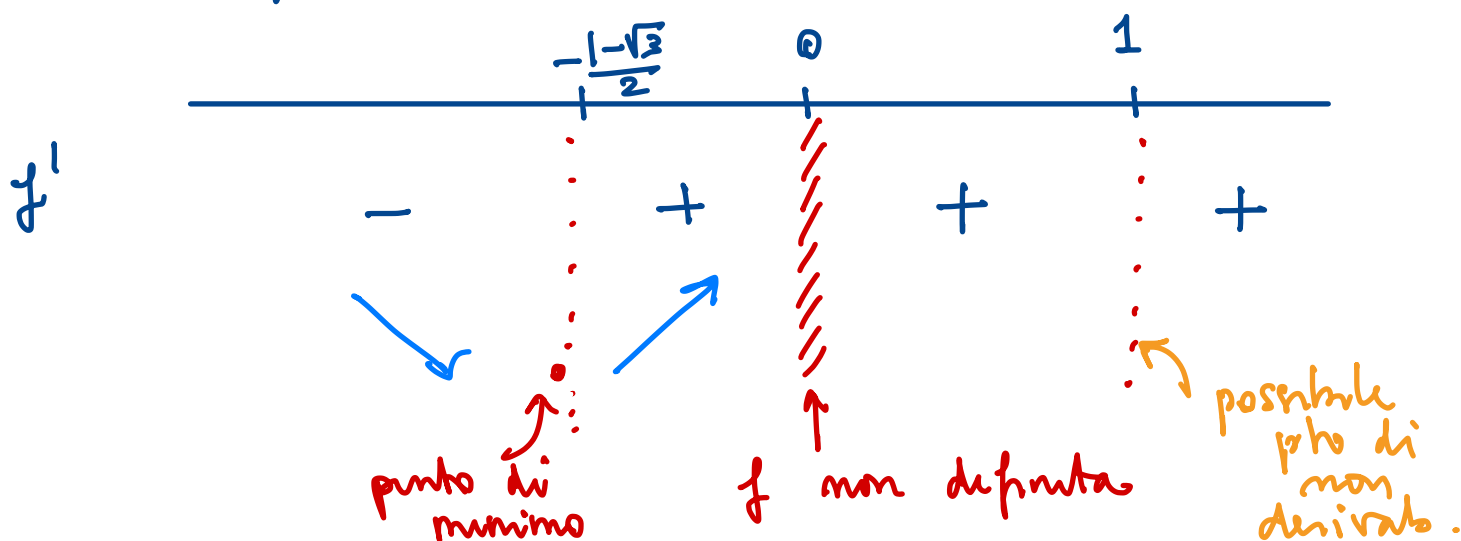
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} (2x^2 + 2x - 1) & x > 1 \\ \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} (2x^2 + 2x - 1) & x < 0 \end{cases}$$

noto che $2x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

con $-\frac{1-\sqrt{3}}{2} < 0$ e

$$-\frac{1+\sqrt{3}}{2} \in]0, 1[$$

ne segue che



notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{-\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}_{\rightarrow -\infty} \underbrace{(2x^2 + 2x - 1)}_{\rightarrow -1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

derivata piatta per $x \rightarrow 0^+$

condurre a $\lim_{y \rightarrow +\infty} y^2 e^{-y} = 0$.

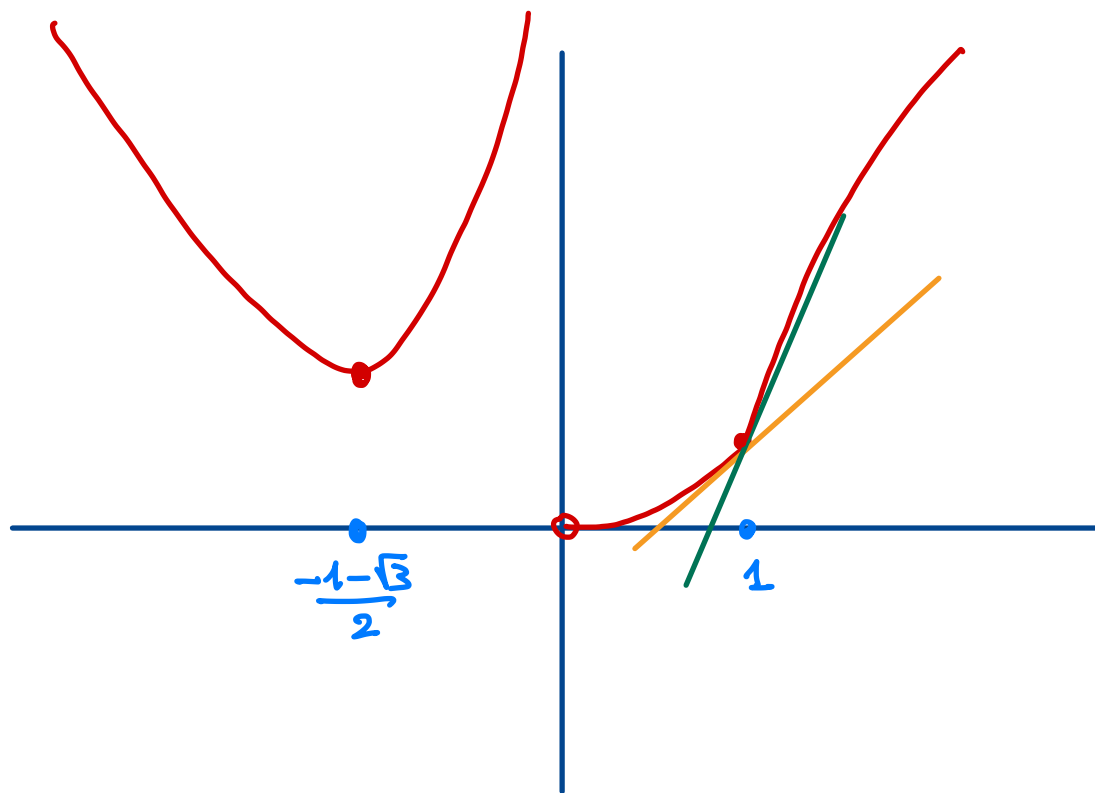
mentre si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} (2x^2 + 2x - 1) = \frac{3}{e}$$

dunque $x=1$ pto di non deriv.

Facciamo un grafico



si potrebbe notare che $1 < \frac{3}{e} < 2$

e che gli asintoti obliqui esistono e hanno pendenza $2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$.

può essere
in metodo $\checkmark$ per trovare l'asintoto obliquo

Per $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-1)e^{-\frac{1}{x}} = (2x-1)\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \boxed{2x-1-2} + o(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ma } x &\rightarrow +\infty \\ -\frac{1}{x} &\rightarrow 0^- \end{aligned}$$

$$e^{-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$y = 2x - 3$
asintoto
obliquo.

3

$$z = \frac{1 + iz}{i + iz^2} \quad (*)$$

noto che $i + iz^2 \neq 0$

implica $z^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow z \neq i, -i$.

condizione di
esistenza.

(*) $\bar{z}$ equivalente, quando $z \neq i, -i$ a

$$z(i + iz^2) = 1 + iz$$

$$\cancel{iz} + iz^3 = 1 + \cancel{iz}$$

cioè $iz^3 = 1 \Rightarrow z^3 = -i$

$$\begin{aligned} -i &= 1 e^{-i\pi/2} \Rightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \\ z &= r e^{i\theta} \\ z^3 &= r^3 e^{i3\theta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi \end{cases}$$

le tre soluzioni sono:

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

da scartare!

$$z_3 = e^{-i\frac{5}{6}\pi}$$

4

Ricordiamo che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

dunque ponendo $y = \sin x$

$$\arctan(y) = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + o(y^5)$$

$$\begin{aligned} \arctan(\sin x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right) \\ &\quad - \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{5} (x + o(x))^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 \cdot \left(-\frac{x^3}{3!} \right) + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$= x - \frac{x^3}{2} + \frac{3}{8} x^5 + o(x^5).$$

da cui $\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \right] \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{120} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30} \right].$

$$f(x) = \arctan(\sin x) - \sinh x = -\frac{2}{3} x^3 + \frac{11}{30} x^5 + o(x^5)$$

da qui si può calcolare

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)$$

$$= 1 - 2x^2 + o(x^2)$$

$$\cos^2(2x) = (1 - 2x^2 + o(x^2))^2$$

$$= 1 - 4x^2 + o(x^2)$$

$$1 - \cos^2(2x) = 4x^2 + o(x^2).$$

allora $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(\sinh x) - \sinh x}{x^\alpha (1 - \cos^2(2x))}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{4x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2})}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{6} & \alpha = 1 \\ 0 & 0 < \alpha < 1 \\ -\infty & \alpha > 1. \end{cases}$$



$\arctan(\sinh x) - \sinh x$ ha il
termine di ordine 3 che si cancella.

TEORIA

1. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona strettamente decrescente.
Voglio mostrare che f è iniettiva.
Supponiamo per assurdo f non iniettiva.

Allora $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 : \underline{f(x_1) = f(x_2)}$

ora se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ contradd.

se invece $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ contradd.
f strett. decr.

2. Vedere corso.

3. a) vero. Infatti se esistesse (per assurdo)

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) \quad \text{allora}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \left[\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) - \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right]$$

$$= L - 0 = L$$

fu il teorema sulle op. sui limiti
Contraddizione!

b.) Falso. Controesempio

$$f(x) = x \quad g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

4. Può essere se $b(t) = k a(t)$, $k \in \mathbb{R}$.

in questo caso $u'(t) = a(t) u(t) + b(t)$
diventa $u'(t) = a(t) [u(t) + k]$.

ed abbiamo la sol. cost. $u(t) \equiv -k$.