

Analisi Matematica 1, 27/01/26

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.

1. Dare la definizione per $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di funzione iniettiva e di funzione monotona strettamente decrescente. Dimostrare che se f è monotona strettamente decrescente allora è iniettiva.
2. Enunciare il teorema sulla derivata della funzione inversa.
3. Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ non esiste.
Dire se le seguenti due affermazioni sono vere o false e giustificare:

$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + g(x) \text{ non esiste}$

$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) \text{ non esiste}$
4. Una equazione differenziale lineare del primo ordine della forma $u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$ può essere a variabili separabili? Se lo è, ammette soluzioni costanti?

Analisi Matematica 1, 27/01/26

Parte di esercizi.

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

Le due domande sono indipendenti.

(A) Determinare tra tutte le primitive seguenti

$$\int \sin(2x) \log(\sin x) dx$$

quella primitiva F che soddisfa $F(\pi/2) = 0$.

(B) Stabilire se la funzione

$$f :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(2x) \log(\sin x)$$

si può estendere per continuità in $x = 0$ e in $x = \pi$ ad una funzione continua $\tilde{f}$. In caso affermativo, dire se la $\tilde{f}$ così estesa soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle.

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = (|x| + |x - 1|)e^{-1/x}$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f , i *limiti notevoli* di f , gli eventuali asintoti .

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata, gli intervalli di monotonia di f , i punti di estremo locale e la loro natura:

- tracciare il grafico qualitativo di f :

usare questo spazio per eventuali calcoli supplementari: indicare l'esercizio

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

- 1) Determinare tutte le soluzioni complesse della equazione

$$z = \frac{1 + iz}{i + iz^2}$$

- 2) Disegnare le soluzioni nel piano complesso.

Esercizio 4 [con svolgimento, 6 punti]

(i) Sia $\alpha > 0$. Scrivere lo sviluppo di Taylor di grado 5 in $x_0 = 0$ della funzioni seguenti

$$f(x) = \arctan(\sin x) - \sinh x$$

(Sugg. può essere utile ricordare che $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$)

(ii) Calcolare in funzione di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arctan(\sin(x)) - \sinh(x)}{x^\alpha (1 - \cos^2(2x))}$$