

Christian Facchini • Ermanno Lanconelli

Un cammino tra massimi e minimi: ciottoli e sorgive di calcolo infinitesimale

*Raggi luminosi. Isoperimetri.
Disuguaglianze geometriche.
Polinomi e funzioni convesse:
un calcolo infinitesimale senza infinitesimi.*



Pitagora Editrice Bologna

Problema isoperimetrico per i triangoli

Euclide incontra Fermat

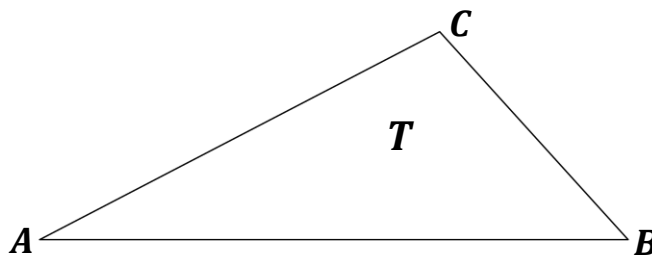
I triangoli *isoperimetrici* sono i triangoli *equilateri*

Precisamente, vale il seguente

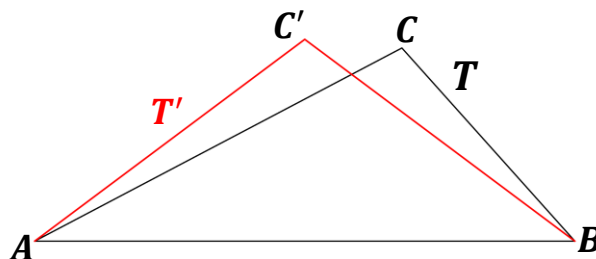
Teorema. Fra tutti i triangoli di *assegnato perimetro* quello *equilatero* – e solo quello equilatero – ha *area massima*.

Unicità (Zenodoro). Se T è isoperimetrico (ovvero: se T ha area massima fra tutti i triangoli aventi il suo stesso perimetro) allora T è equilatero.

Dimostrazione. Sia $T = ABC$ un triangolo *non equilatero*, ad esempio $\overline{AC} \neq \overline{BC}$.



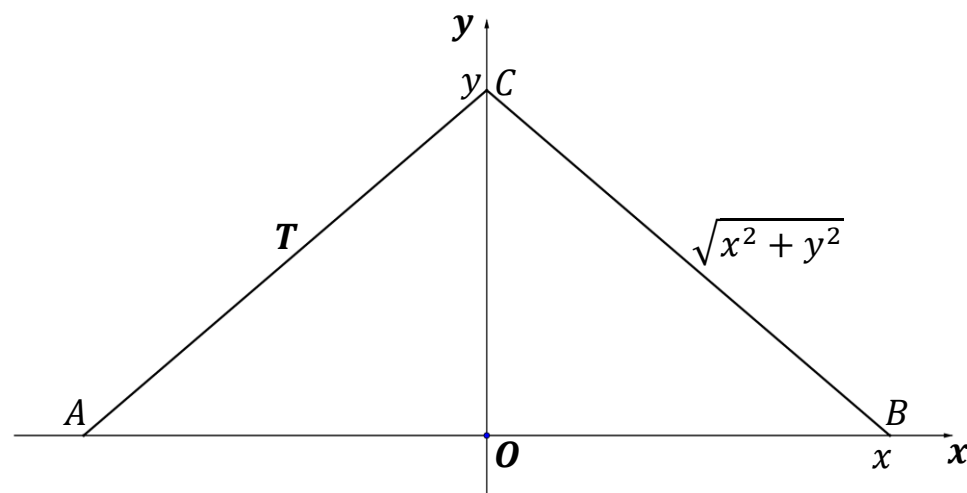
Allora esiste un triangolo isoscele $T' = ABC'$ tale che $p(T') = p(T)$, $a(T') > a(T)$



Quindi T non è isoperimetrico.

Esistenza

- Dato un qualunque triangolo ve n'è uno isoscele avente il suo stesso perimetro e area maggiore (o uguale).
- Per dimostrare che fra tutti i triangoli di assegnato perimetro ve n'è uno di area massima basta quindi dimostrare che *fra tutti i triangoli isosceli* di assegnato perimetro ve n'è uno di area massima.
- Poiché perimetro e area di ogni figura geometrica sono invarianti per rotazioni e traslazioni non è restrittivo - ai fini della dimostrazione dell'esistenza di un triangolo isoperimetrico – considerare solo triangoli isosceli con base AB sull'asse delle ascisse e vertice C sull'asse delle ordinate.



$$p = p(x, y) = 2x + 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Se $q = \frac{p}{2}$ è il semiperimetro di T

$$q = x + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Essendo $x \geq 0$, $q \geq x + \sqrt{x^2} = 2x$. Pertanto

$$0 \leq x \leq \frac{q}{2}$$

Analogamente, essendo anche $y \geq 0$, $q \geq \sqrt{y^2} = y$. Quindi

$$0 \leq y \leq q$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} q = x + \sqrt{x^2 + y^2} &\Leftrightarrow q - x = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow (q - x)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow q^2 + x^2 - 2qx = x^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{q^2 - y^2}{2q} \end{aligned}$$

Pertanto

$$a(T) = xy = \frac{y}{2q}(q^2 - y^2)$$

Allora: dimostrare *l'esistenza di un triangolo isoperimetrico* è equivalente a dimostrare che la funzione

$$y \mapsto f(y) := \frac{y}{2q}(q^2 - y^2), \quad 0 \leq y \leq q$$

ha massimo sull'intervallo $0 \leq y \leq q$. Osserviamo che $f(y)$ si può scrivere nella forma

$$f(y) = \frac{q}{2}y \left(1 - \left(\frac{y}{q}\right)^2\right)$$

onde, ponendo $\frac{y}{q} = t$,

$$f(tq) = \frac{q^2}{2}t(1 - t^2)$$

con $0 \leq t \leq 1$.

Massimizzare f sull'intervallo $0 \leq y \leq q$ equivale pertanto a massimizzare la funzione

$$t \mapsto g(t) := t(1 - t^2)$$

sull'intervallo $0 \leq t \leq 1$ ($\Leftrightarrow 0 \leq y \leq q$).

Abbiamo così riconosciuto che

Fra tutti i triangoli di perimetro $p = 2q$ ve n'è uno di area massima se e solo se la funzione

$$g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = t(1 - t^2)$$

ha massimo.

Ricordiamo: questo significa dimostrare che esiste $t_0 \in [0,1]$: $g(t) \leq g(t_0)$ per ogni $t \in [0,1]$.

Dimostrare questa affermazione è facile usando il calcolo infinitesimale. *Ma noi vogliamo – viceversa – partire da questo problema per comprendere l'idea che condusse Fermat alla nozione di derivata.*

Sia $t_0 \in [0,1]$ fissato e scriviamo g come polinomio nella variabile $h = t - t_0$.

Possiamo procedere così: visto che

$$t = t_0 + (t - t_0) = t_0 + h$$

Si ha

$$\begin{aligned} g(t) &= t - t^3 = (t_0 + h) - (t_0 + h)^3 = t_0 + h - (t_0^3 + 3t_0^2h + 3t_0h^2 + h^3) \\ &= t_0 - t_0^3 + (1 - 3t_0^2)h - (3t_0 + h)h^2 \\ &= g(t_0) + (1 - 3t_0^2)h - (3t_0 + h)h^2 \end{aligned}$$

Definiamo

$$g'(t_0) := 1 - 3t_0^2$$

Allora

$$g(t) = g(t_0) + g'(t_0)h - (3t_0 + h)h^2$$

Questa identità vale per ogni $t, t_0 \in [0,1]$, con $h = t - t_0$.

Osserviamo ora che

$$3t_0 + h = 3t_0 + t - t_0 = 2t_0 + t \geq 0 \text{ per ogni } t, t_0 \in [0,1]$$

In definitiva

$$(*) \quad g(t) \leq g(t_0) + g'(t_0)h$$

per ogni $t, t_0 \in [0,1]$.

Quindi, se scegliamo

$$t_0 \in [0,1]: g'(t_0) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

troviamo

$$g(t) \leq g(t_0) \quad \text{per ogni } t \in [0,1]$$

In altri termini

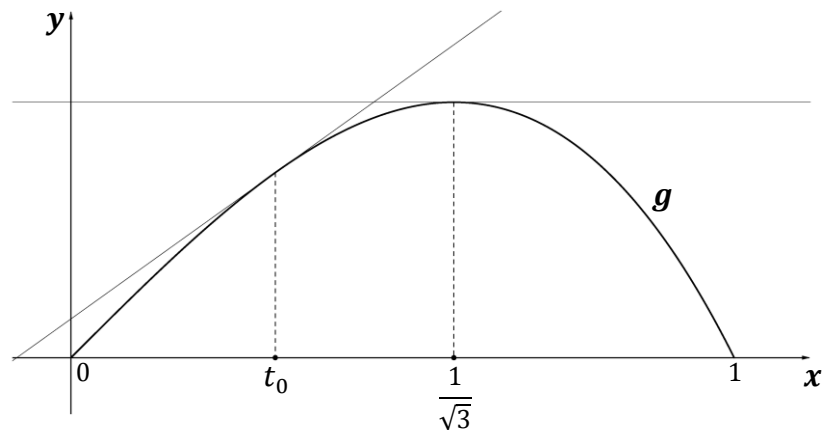
g ha massimo in $[0,1]$ e il suo massimo è $g(t_0)$

Questo conclude la dimostrazione del teorema isoperimetrico per i triangoli

NOTA (Anticipazione...) La disuguaglianza

$$(*) \quad g(t) \leq g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0)$$

esprime la concavità della funzione g su $[0,1]$.



L'esistenza del massimo di g che abbiamo appena dimostrato è un caso particolare di un teorema generale:
ogni funzione concava (convessa) su un intervallo limitato e chiuso è dotata di massimo (minimo).

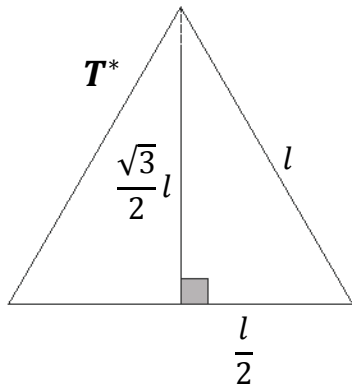
Disuguaglianza isoperimetrica per i triangoli

Se T è un qualsiasi triangolo allora

$$a(T) \leq \frac{1}{12\sqrt{3}} (p(T))^2$$

e vale l'uguaglianza se e solo se T è un triangolo equilatero.

Dimostrazione. Sia T^* il triangolo equilatero tale che $p(T^*) = p(T)$ e $a(T^*) \geq a(T)$, con $a(T^*) > a(T)$ se T non è un triangolo equilatero.



$$a(T^*) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{p(T^*)}{3} \right)^2 = \frac{1}{12\sqrt{3}} \left(\frac{p(T^*)}{3} \right)^2$$

$$a(T) \leq a(T^*) = \frac{1}{12\sqrt{3}} \left(\frac{p(T^*)}{3} \right)^2 = \frac{1}{12\sqrt{3}} \left(\frac{p(T)}{3} \right)^2$$