

## Esercizio di apertura del corso

Davide Barilari

A inizio corso ci siamo proposti di cercare di capire chi fosse il *più grande elemento* dell'insieme

$$A = \{\sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

in termini più formali vogliamo conoscere l'estremo superiore

$$\lambda = \sup\{\sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Questa è una domanda non immediata dato che il limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(n)$  non esiste. Osserviamo che l'insieme  $A$  è limitato e non vuoto dunque l'estremo superiore esiste.

Vogliamo dimostrare la seguente proprietà: (notare che implica  $\lambda = 1$ )

**Proposizione 1.** *L'insieme*

$$\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

*è denso in  $[-1, 1]$ , cioè per ogni  $y \in [-1, 1]$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che*

$$|\sin n - y| < \varepsilon.$$

Per la dimostrazione useremo soltanto strumenti elementari: principio dei cassetti, continuità e periodicità del seno. Si basa sulla continuità della funzione seno e quindi ci si riconduce al fatto che interi  $n \bmod 2\pi$  sono densi.

### 1. GLI INTERI $n \bmod 2\pi$ SONO DENSI

Vediamolo per step. Iniziamo da un risultato classico.

**Lemma 2.** *Sia  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  irrazionale. Allora, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $m \in \mathbb{N}$  tale che*

$$\text{dist}(m\alpha, \mathbb{Z}) < \varepsilon,$$

*cioè il multiplo  $m\alpha$  è a distanza minore di  $\varepsilon$  da un intero.*

*Dimostrazione.* Fissato  $\varepsilon > 0$ , scegliamo  $N \in \mathbb{N}$  tale che

$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Consideriamo ora gli  $N + 1$  numeri reali

$$0\alpha, 1\alpha, 2\alpha, \dots, N\alpha$$

e le loro parti frazionarie (dove  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$  indica la parte frazionaria di  $x$ )

$$\{0\alpha\}, \{1\alpha\}, \dots, \{N\alpha\} \in [0, 1).$$

Dividiamo ora l'intervallo  $[0, 1)$  in  $N$  sottointervalli disgiunti

$$I_k = \left[ \frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Abbiamo  $N + 1$  numeri  $\{0\alpha\}, \dots, \{N\alpha\}$  e soltanto  $N$  intervalli  $I_k$ , quindi per il principio dei cassetti (in inglese, pigeonhole principle) esistono due indici distinti  $p, q$  con  $0 \leq q < p \leq N$  tali che

$$\{p\alpha\}, \{q\alpha\} \in I_k \quad \text{per qualche } k.$$

In particolare

$$0 \leq \{p\alpha\} - \{q\alpha\} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Osserviamo ora che

$$\{p\alpha\} - \{q\alpha\} = \{(p-q)\alpha\} \quad \text{oppure} \quad \{p\alpha\} - \{q\alpha\} = \{(p-q)\alpha\} - 1,$$

a seconda che passando da  $q\alpha$  a  $p\alpha$  si oltrepassi o meno un intero. In ogni caso, la distanza di  $(p-q)\alpha$  da un intero è data da

$$\text{dist}((p-q)\alpha, \mathbb{Z}) = \min(\{(p-q)\alpha\}, 1 - \{(p-q)\alpha\}) \leq \{p\alpha\} - \{q\alpha\} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Ponendo  $m := p - q \in \{1, \dots, N\}$ , otteniamo

$$\text{dist}(m\alpha, \mathbb{Z}) < \varepsilon,$$

come volevamo. □

**Lemma 3.** Se  $\alpha$  è irrazionale, allora l'insieme delle parti frazionarie

$$\{\{n\alpha\} : n \in \mathbb{N}\}$$

è denso in  $[0, 1]$ .

*Dimostrazione.* Sia  $(a, b) \subset [0, 1]$  un intervallo aperto arbitrario. Dobbiamo mostrare che esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che

$$\{n\alpha\} \in (a, b).$$

Poniamo  $\ell = b - a > 0$ . Per il lemma precedente, esiste  $m \in \mathbb{N}$  tale che

$$\delta := \text{dist}(m\alpha, \mathbb{Z}) < \ell.$$

Possiamo pensare a  $\delta$  come a uno “step” (passo) sull'intervallo  $[0, 1]$ , preso modulo 1.

Consideriamo la successione

$$x_k := \{km\alpha\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Osserviamo che

$$x_{k+1} = \{(k+1)m\alpha\} = \{km\alpha + m\alpha\}$$

si ottiene da  $x_k$  aggiungendo (modulo 1) proprio la quantità  $\delta$ . In particolare, la distanza tra  $x_k$  e  $x_{k+1}$  modulo 1 è al più  $\delta$ . Dunque necessariamente qualche  $x_k$  cade in  $(a, b)$  (se non si è convinti, provare per assurdo!). Poiché l'intervallo  $(a, b)$  era arbitrario, la densità è dimostrata.  $\square$

**Lemma 4.** L'insieme  $\{n \bmod 2\pi : n \in \mathbb{N}\}$  è denso in  $[0, 2\pi]$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $\pi$  è irrazionale, anche  $\alpha := \frac{1}{2\pi}$  è irrazionale. Dal lemma precedente, le parti frazionarie  $\{\{n\alpha\} : n \in \mathbb{N}\}$  sono dense in  $[0, 1]$ . Moltiplicando per  $2\pi$ , si ottiene che l'insieme

$$\{2\pi\{n\alpha\} : n \in \mathbb{N}\}$$

è denso in  $[0, 2\pi]$ . Ma

$$2\pi\{n\alpha\} = 2\pi\left(\frac{n}{2\pi} - \left\lfloor \frac{n}{2\pi} \right\rfloor\right) = n - 2\pi\left\lfloor \frac{n}{2\pi} \right\rfloor \equiv n \pmod{2\pi}.$$

Quindi i numeri  $n$  considerati modulo  $2\pi$  sono densi in  $[0, 2\pi]$ .  $\square$

## 2. DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 1

*Dimostrazione.* Sia  $y \in [-1, 1]$  fissato. Vogliamo mostrare che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $|\sin n - y| < \varepsilon$ . Poiché la funzione

$$\sin : [0, 2\pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

è continua e suriettiva, esiste  $\theta \in [0, 2\pi]$  tale che

$$\sin \theta = y.$$

Per la continuità di  $\sin$  in  $\theta$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$|x - \theta| < \delta \implies |\sin x - \sin \theta| < \varepsilon.$$

D'altra parte, dal lemma precedente sappiamo che l'insieme  $\{n \bmod 2\pi : n \in \mathbb{N}\}$  è denso in  $[0, 2\pi]$ . Dunque esiste  $n \in \mathbb{N}$  e un intero  $k \in \mathbb{Z}$  tali che

$$|n - (\theta + 2k\pi)| < \delta.$$

Usando la  $2\pi$ -periodicità del seno, abbiamo

$$\sin n = \sin(n - 2k\pi).$$

Poiché  $|n - 2k\pi - \theta| < \delta$ , per la scelta di  $\delta$  deduciamo

$$|\sin n - \sin \theta| = |\sin(n - 2k\pi) - \sin \theta| < \varepsilon.$$

Ricordando che  $\sin \theta = y$ , otteniamo

$$|\sin n - y| < \varepsilon.$$

Poiché  $y \in [-1, 1]$  e  $\varepsilon > 0$  erano arbitrari, segue che l'insieme  $\{\sin n : n \in \mathbb{N}\}$  è denso in  $[-1, 1]$ .  $\square$