

Esercizi Foglio 1

Davide Barilari
davide.barilari@unipd.it

1. PREREQUISITI, LOGICA, SOMMATORIE, INDUZIONE

Esercizio 1. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni per $x \in \mathbb{R}$:

- | | |
|--|---|
| <p>(i) $x - 1 \leq 2$;</p> <p>(ii) $2x^2 + x - 5 = 0$;</p> <p>(iii) $\frac{2x+3}{x-1} - (x+1) \geq 0$;</p> <p>(iv) $x+1 + 2 \leq 2x-1$;</p> <p>(v) $3^{2x-1} < 2 \cdot 5^{x+1}$;</p> <p>(vi) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \geq 2x$</p> <p>(vii) $2^x + 2^{x+3} = 16$;</p> <p>(viii) $\frac{\log_2 x + 3}{\log_2 x + 1} = 2$;</p> <p>(ix) $2 \sin^2 x + \sin x \geq 0$;</p> <p>(x) $\sqrt{ x - 1} \geq x$;</p> <p>(xi) $x + 5 \leq \alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;</p> <p>(xii) $\sqrt{ x + 2} > x + 2$;</p> <p>(xiii) $\sqrt{x^2 + x - 1} \geq 1$;</p> <p>(xiv) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} < 1$;</p> <p>(xv) $\sqrt{x^2 + 1} \geq x - 3x$;</p> <p>(xvi) $x^2 + x^3 < 1 + x$;</p> <p>(xvii) $0 < \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + 1} < 1$;</p> <p>(xviii) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} < 1$;</p> <p>(xix) $\frac{2}{e^x} + e^{2x} \geq 1$;</p> | <p>(xx) $e^x + e^{-x} \geq e$;</p> <p>(xxi) $e^x - e^{-x} \geq e$;</p> <p>(xxii) $\log_2(x^2 + x + 2) \geq \log_2(x + 2)$;</p> <p>(xxiii) $\log_\alpha(3x + 7) > 2$ al variare di $\alpha > 0$;</p> <p>(xxiv) $\log(\log x) > 0$;</p> <p>(xxv) $\log_x 5 + 2 \log_{5x} 5 - 3 \log_{25x} 5 = 0$
[Suggerimento: usare $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$].</p> <p>(xxvi) $2 \cos^2 x + 3 \sin x - 3 > 0$;</p> <p>(xxvii) $\sin x \geq \frac{1}{2}$;</p> <p>(xxviii) $\frac{\tan^2 x}{\tan^2 x - 1} < \frac{1}{2}$;</p> <p>(xxix) $2 \sin x - 1 < 2 \cos x - \tan x$;</p> <p>(xxx) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x^2 - 3x} \geq 2$;</p> <p>(xxxi) $x^2 - 1 > 2x + 2$;</p> <p>(xxxii) $4^{4x} + 4^x - 3 > 0$;</p> <p>(xxxiii) $\cos x < \frac{1}{2}$;</p> <p>(xxxiv) $2^{x^2 - 2x} \geq 3$;</p> <p>(xxxv) $x^2 + x - 1 \geq 1$;</p> <p>(xxxvi) $\frac{3x+1}{x-2} \leq 2$;</p> <p>(xxxvii) $\log_{1/2} \left(\frac{x}{x+1}\right) \geq 0$.</p> |
|--|---|

Esercizio 2. Siano A, B, U insiemi tali che $A, B \subset U$. Per ogni sottoinsieme $E \subset U$, si indichi con $\mathcal{C}_U E$ l'insieme complementare di E in U , cioè $\mathcal{C}_U E = U \setminus E$. Dimostrare le seguenti relazioni:

- | | |
|--|--|
| <p>(i) $\mathcal{C}_U \emptyset = U$ e $\mathcal{C}_U U = \emptyset$;</p> <p>(ii) $\mathcal{C}_U(\mathcal{C}_U A) = A$;</p> | <p>(iii) $\mathcal{C}_U(A \cup B) = (\mathcal{C}_U A) \cap (\mathcal{C}_U B)$;</p> <p>(iv) $\mathcal{C}_U(A \cap B) = (\mathcal{C}_U A) \cup (\mathcal{C}_U B)$.</p> |
|--|--|

Esercizio 3. Siano A, B, C e D quattro insiemi. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

- | | |
|--|--|
| <p>(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;</p> <p>(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;</p> <p>(iii) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;</p> | <p>(iv) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;</p> <p>(v) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;</p> <p>(vi) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.</p> |
|--|--|

Esercizio 4. Poniamo $x = \sum_{m=0}^{100} 1$. Quale tra le seguenti risposte è corretta?

- | | |
|--|---|
| <p>(i) $x = 100$;</p> <p>(ii) $x = m$;</p> | <p>(iii) $x = 11$;</p> <p>(iv) $x = 101$.</p> |
|--|---|

Esercizio 5. Poniamo $x = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)$. Quale tra le seguenti risposte è corretta?

$$(i) \quad x = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + 1$$

$$(iii) \quad x = n(n+1)$$

$$(ii) \quad x = \frac{n(n+1)}{2}$$

(iv) Nessuna delle precedenti.

Esercizio 6. Poniamo $x = \sum_{k=1}^{100} k^3$. Quali tra le seguenti risposte *non* è corretta?

$$(i) \quad x = \sum_{s=0}^{99} (s+1)^3$$

$$(iii) \quad x = \sum_{i=1}^9 i^3 + \sum_{i=10}^{100} i^3$$

$$(ii) \quad x = \sum_{h=2}^{101} (h+1)^3$$

$$(iv) \quad x = \sum_{s=2}^{101} (s-1)^3$$

Esercizio 7. Poniamo $x = \sum_{k=2}^{100} \sqrt{k} - \sum_{k=1}^{99} \sqrt{k}$. Quale tra le seguenti risposte è corretta?

$$(i) \quad x = 99$$

$$(iii) \quad x = 9$$

$$(ii) \quad x = 0$$

(iv) Non si può calcolare.

Esercizio 8. Provare per induzione le seguenti formule:

$$(i) \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N};$$

$$(ii) \quad \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}_0;$$

$$(iii) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N};$$

$$(iv) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N};$$

$$(v) \quad \sum_{k=1}^n (3k+1) = \frac{3n^2+5n}{2} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 9 (Somma telescopica). Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale la formula

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0$$

per qualunque scelta di $n+1$ numeri reali $x_0, x_1, \dots, x_n$. Ricavare in particolare oppure dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale la *formula di Mengoli*

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Esercizio 10. Vogliamo trovare un modo alternativo all'induzione per dimostrare la formula

$$(\star) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Procediamo per passi, come segue.

$$(i) \quad \text{Calcolare } \sum_{k=1}^n [k^3 - (k-1)^3] \text{ osservando che si tratta di una somma telescopica.}$$

$$(ii) \quad \text{Osservare che } k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1 \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

(iii) Concludere la dimostrazione della formula $(\star)$ utilizzando le somme già note

$$\sum_{k=1}^n 1 = n \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Esercizio 11. Provare per induzione le seguenti disuguaglianze:

- (i) $2^n \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $3^n \geq n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) $n! \geq 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 4$;
- (iv) $n! \geq n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 4$;

Esercizio 12. Dimostrare per induzione le seguenti formule:

- (i) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 2$;
- (ii) $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 2$;
- (iii) $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 2$.

Esercizio 13. Dimostrare che $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 14 (Somma geometrica). Sia $q \in \mathbb{R}$ tale che $q \neq 1$. Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale la formula

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Esercizio 15 (Disuguaglianza di Bernoulli). Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale la disuguaglianza

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

per qualunque scelta di n numeri reali $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0$. Ricavare in particolare o dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale la disuguaglianza $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ per ogni $x \geq 0$.

Esercizio 16. Dimostrare che per ogni numero primo p allora $\sqrt{p}$, non appartiene a $\mathbb{Q}$.

Esercizio 17. Siano $a, b \in \mathbb{Q}$ con $b > 0$. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:

- (i) $a^b \in \mathbb{Q}$;
- (ii) $\log_a b \in \mathbb{Q}$;
- (iii) $a^b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- (iv) $\log_a b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Esercizio 18. Determinare (se esistono) inf, sup, max e min dei seguenti insiemi:

- (i) $A = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } x = n^2[\cos(n^2\pi) - 1](-1)^n + 4\}$;
- (ii) $B = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } x = n^2[\sin(n^2\pi) - 1](-1)^n + 6\}$;
- (iii) $C = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ tale che } x = m + \frac{1}{m}\right\}$;
- (iv) $D = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists m, n \in \mathbb{N} \text{ tali che } x = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}\right\}$;
- (v) $E = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } x = 2 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$;
- (vi) $F = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } x = (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$;
- (vii) $I = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ tale che } x = 2^n - 2^{-n}\}$;
- (viii) $L = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } x = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right\}$;
- (ix) $M = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } x = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right\}$;

2. ANCORA SOMMATORIE, INDUZIONE, POTENZA DEL BINOMIO

Esercizio 19. Dimostrare che un insieme con $n \in \mathbb{N}$ elementi ha esattamente 2^n sottoinsiemi.

Esercizio 20. Sia $m \in \mathbb{N}$. Dimostrare che $(n+1)^m \leq 2^m \cdot n^m$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 21. Sia $m \in \mathbb{N}$. Dimostrare che $(n+1)^m \leq n^m + (2^m - 1)n^{m-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 22. Dimostrare che $4^n \geq n^3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 23. Dimostrare che $3^n \geq n^3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 24. Dimostrare che $5^n \geq n^4$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 25. Dimostrare che $4^n \geq n^4$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$.

Esercizio 26. Siano $m \in \mathbb{N}$ e siano $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ numeri reali. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e spiegare perché:

- | | |
|---|---|
| (i) $\sum_{k=0}^m x_k^2 = x_0^2 + x_m^2 + \sum_{k=1}^{m-1} x_k^2;$ | (ix) $\sum_{k=0}^m x_j^3 = x_0^3 + \sum_{j=1}^m x_k^3;$ |
| (ii) $\sum_{i=0}^{m-1} x_i^3 = x_0^3 + x_m^3 + \sum_{j=1}^{m-1} x_j^3;$ | (x) $\sum_{k=0}^m 2x_j = 2 \sum_{j=0}^m x_j;$ |
| (iii) $\sum_{i=0}^m x_i^3 = x_0^3 + x_m^3 + \sum_{l=1}^{m-1} x_l^3;$ | (xi) $\sum_{k=1}^m 2x_j = 2 \sum_{l=0}^m x_j;$ |
| (iv) $\sum_{j=2}^m x_j = x_0 + x_1 + \sum_{j=2}^m x_j;$ | (xii) $\sum_{k=1}^{m-2} x_{k+2}^2 = \sum_{l=3}^m x_l;$ |
| (v) $\sum_{k=2}^m x_j = \sum_{j=2}^m x_j;$ | (xiii) $\sum_{k=1}^{m-2} x_{k-1}^2 = \sum_{l=0}^{m-2} x_l^2;$ |
| (vi) $\sum_{k=0}^m x_j^2 = x_m^2 + x_{m+1}^2 + \sum_{l=2}^m x_l;$ | (xiv) $\sum_{k=0}^m (x_k^3 + x_k^2) = \left(\sum_{l=0}^m x_l^2 \right) + \left(\sum_{i=0}^m x_j^3 \right);$ |
| (vii) $\sum_{k=0}^m x_j = x_0 + x_m + \sum_{k=1}^m x_k;$ | (xv) $\sum_{k=0}^m (-x_k + 2x_k^2) = 4 \left(\sum_{l=0}^m x_l^2 \right) - \left(\sum_{i=0}^m x_i \right);$ |
| (viii) $\sum_{k=1}^m x_j = \sum_{j=1}^m x_k;$ | (xvi) $\left(\sum_{k=0}^m x_k \right)^2 = \sum_{l=0}^m x_l^2;$ |

Esercizio 27. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale la disuguaglianza

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n) \leq \frac{1}{1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

per qualunque scelta di n numeri reali $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in [0, 1]$.

Esercizio 28. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Dimostrare che, se esiste, l'estremo superiore di A è unico. Analogamente, dimostrare che, se esiste, l'estremo inferiore di A è unico.

Esercizio 29 (Proprietà del coefficiente binomiale). Dati $n, k \in \mathbb{N}_0$ con $k \leq n$, il coefficiente binomiale è definito ponendo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Usando la definizione, dimostrare le seguenti proprietà:

- | | |
|--|---|
| (i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;$ | (iii) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1};$ |
| (ii) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k};$ | (iv) $k \binom{n+k-1}{k} = n \binom{n+k-1}{k-1}.$ |

Esercizio 30. Dimostrare che $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 31. Siano $\sinh$ e $\cosh$ seno e coseno iperbolico, rispettivamente, cioè

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Usando la definizione, dimostrare le seguenti proprietà:

- (i) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- (ii) $\cosh(-x) = \cosh(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

- (iv) $\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- (v) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- (vi) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
- (vii) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Esercizio 32. Definiamo le funzioni *parte intera inferiore* (in inglese, *floor function*) come

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

e *parte intera superiore* (in inglese, *ceiling function*) come

$$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Usando la definizione, dimostrare le seguenti proprietà:

- (i) $\lfloor n \rfloor = \lceil n \rceil = n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$;
- (iii) $-\lfloor x \rfloor = \lceil -x \rceil$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- (ii) $\lfloor x \rfloor \leq \lceil x \rceil$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, con uguaglianza se e solo se $x \in \mathbb{Z}$;
- (iv) $-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3. FUNZIONI E DEFINIZIONE DI LIMITE

Esercizio 33. Determinare il dominio naturale e l'insieme dei valori (immagine) delle seguenti funzioni:

- (i) $f(x) = 3x + 1$;
- (v) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$;
- (ii) $f(x) = 4 + x^2$;
- (vi) $f(x) = \frac{\sin(x) + 2}{\sin(x) + 3}$;
- (iii) $f(x) = 7x - 1$;
- (vii) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 3}$.
- (iv) $f(x) = \frac{2x + 1}{3x + 1}$;

Esercizio 34. Dimostrare che una funzione affine $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è biunivoca se e solo se $f(1) \neq f(0)$ e, in tal caso, calcolare la funzione inversa e dimostrare che essa è ancora una funzione affine.

Esercizio 35. Dimostrare che le funzioni $\sinh$ e $\cosh$ sono invertibili (restringendone opportunamente il dominio di definizione) e calcolarne le funzioni inverse, rispettivamente indicate con $\operatorname{arcsinh}$ e $\operatorname{arccosh}$.

Esercizio 36. Stabilire se le seguenti funzioni (tutte definite su $\mathbb{R}$) siano pari o dispari. In caso affermativo, dimostrarlo; in caso negativo, esibire un controesempio.

- (i) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$;
- (vii) $f(x) = x^4 - x^2$;
- (ii) $f(x) = \sin(x) - \sinh(x)$;
- (viii) $f(x) = 4 + x^3 - x$;
- (iii) $f(x) = \cos(x) - \cosh(x)$;
- (ix) $f(x) = x^5 + x^3 + x$;
- (iv) $f(x) = a^x$ con $a > 0$;
- (x) $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ con $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$;
- (v) $f(x) = 3x + 7$;
- (xi) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+3}$;
- (vi) $f(x) = 5 - x^2$;
- (xii) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+2}$.

Esercizio 37. Sia $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = x^n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è pari se e solo se n è pari e, similmente, è dispari se e solo se n è dispari.

Esercizio 38. Siano $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Definiamo le funzioni $f+g, f-g, fg: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x), \quad (fg)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare le seguenti affermazioni:

- (i) se f e g sono pari, allora anche $f+g, f-g$ e fg sono pari;
- (ii) se f e g sono dispari, allora anche $f+g$ e $f-g$ sono dispari, mentre fg è pari;
- (iii) se f è pari e g è dispari, allora fg è dispari.

Nell'ultimo caso, e cioè f è pari e g è dispari, cosa possiamo dire sulla parità o disparità di $f+g$ e $f-g$?
Assumiamo ora che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e definiamo $\frac{f}{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare le seguenti affermazioni:

- (iv) se f e g sono pari, allora anche $\frac{f}{g}$ è pari;
- (v) se f e g sono dispari, allora $\frac{f}{g}$ è pari;
- (vi) se f è pari e g è dispari, allora $\frac{f}{g}$ è dispari.

Esercizio 39. Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Dimostrare le seguenti affermazioni:

- (i) se f è pari, allora anche $g \circ f$ è pari;
- (ii) se f è dispari e g è pari, allora $g \circ f$ è pari;
- (iii) se f e g sono dispari, allora $g \circ f$ è dispari;
- (iv) se f è periodica di periodo $T > 0$, allora anche $g \circ f$ è periodica di periodo T ;
- (v) se f e g sono crescenti, allora anche $g \circ f$ è crescente;
- (vi) se f è crescente e g è decrescente, allora $g \circ f$ è decrescente.

Esercizio 40. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo $T > 0$. Dimostrare che $f(x + nT) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 41. Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni periodiche di periodo $T > 0$. Stabilire se le funzioni $f + g$, $f - g$, fg e $\frac{f}{g}$ (in quest'ultimo caso, assumendo che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$) definite nell'Esercizio 38 siano periodiche o no e, in caso affermativo, indicarne il periodo.

Esercizio 42. Stabilire se le seguenti funzioni (tutte definite su $\mathbb{R}$) siano limitate o illimitate (superiormente o inferiormente). In caso affermativo, dimostrarlo; in caso negativo, esibire un controesempio.

- (i) $f(x) = \sin(x) + 20 \cos(x)$;
- (ii) $f(x) = \cosh(x)$;
- (iii) $f(x) = \cos(x) + 2^x$;
- (iv) $f(x) = a^x$ con $a > 0$;
- (v) $f(x) = 7x + 3$;
- (vi) $f(x) = 1 - x^2$;
- (vii) $f(x) = x^4 - x^2$;
- (viii) $f(x) = 4 + x^3$;
- (ix) $f(x) = x^3 + x$;
- (x) $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ con $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$;
- (xi) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$;
- (xii) $f(x) = \frac{x^4+5}{x^4+2}$.

Esercizio 43. Trovare (se esistono) tutti i punti di accumulazione dei seguenti insiemi:

- (i) $A_1 = \left\{ \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$;
- (ii) $A_2 = \left\{ 2^n - \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$;
- (iii) $A_3 = \left\{ \frac{5}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$;
- (iv) $A_4 = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$;
- (v) $A_5 = \{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$;
- (vi) $A_6 = \left\{ \frac{n+3}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$;
- (vii) $A_7 = \{2, 5, 81\}$;
- (viii) $A_8 = \left\{ \frac{n^3+2}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$;
- (ix) $A_9 = \{\log n : n \in \mathbb{N}\}$;
- (x) $A_{10} = \left\{ -2\sqrt{n} + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Esercizio 44. Dimostrare che tutti i punti di $A = \{n^2 + 5 : n \in \mathbb{N}\}$ sono isolati (ovvero, non sono di accumulazione) per A .

Esercizio 45. Trovare il valore dei seguenti limiti e verificarne la correttezza usando la definizione:

- (i) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} x^2$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 3} (3x + 7)$;
- (iv) $\lim_{x \rightarrow 1} (2 + x^2)$;
- (v) $\lim_{x \rightarrow 4} \log_2(x)$;
- (vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$;
- (vii) $\lim_{x \rightarrow \log 2} 6 \sinh(x)$;
- (viii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+2}$;
- (ix) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$;
- (x) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$;
- (xi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2^x) = -\infty$;

Esercizio 46. Siano $n \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$.

Esercizio 47. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) \in [0, |x|]$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Esercizio 48. Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A e $l \in \mathbb{R}$. Dato $c \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $g(x) = f(x) + c$ per ogni $x \in A$. Dimostrare che, se $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, allora $l + c = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Esercizio 49. Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A e $l \in \{\pm\infty\}$. Dato $c \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $g(x) = f(x) + c$ per ogni $x \in A$. Dimostrare che, se $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, allora $l = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

4. CALCOLO DEI LIMITI

Esercizio 50. Determinare $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + ax^2 + x}{x^2 - ax + 1} - (x + 2) \right) = 0$.

Esercizio 51. Si consideri la funzione $f(x) = 2x^2 - x$.

- (i) Determinare il dominio di definizione di f .
- (ii) Determinare $f(\mathbb{R})$, $f(\{4, 5\})$, $f\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)\right)$ e $f^{-1}([0, +\infty))$.
- (iii) Stabilire se f sia iniettiva.
- (iv) Stabilire se f abbia una restrizione che sia biunivoca su $\text{Im}(f)$ e, in caso affermativo, determinarla.

Esercizio 52. Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A e $l \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in A \setminus \{x_0\}$ tale che $|x - x_0| < \delta$.

Esercizio 53. Calcolare i seguenti limiti:

- | | | |
|--|--|--|
| (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan(x)}$ | (vi) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2+7x+10}$ | (xi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}$ |
| (ii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1}$ | (vii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + x}$ | (xii) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + x^2) \tan(x)$ |
| (iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ | (viii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + x^3 \cos(x))$ | (xiii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{(x + x^2) \tan(x)}$ |
| (iv) $\lim_{x \rightarrow 4} x^3 \log_2^4(x)$ | (ix) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{3}{x^4}\right)$ | (xiv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{\sin(3x^2)}$ |
| (v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + x \sin^2(x))$ | (x) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2(x)}{3x^2}$ | (xv) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2(x) \sin^3\left(\frac{1}{x}\right)$ |

Esercizio 54. Dimostrare che non esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(x).$$

Esercizio 55. Trovare delle funzioni f e g tali che:

- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pi$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ e non esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Esercizio 56. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ un insieme. Dimostrare che x_0 è un punto di accumulazione destro o sinistro per A se e solo se x_0 è un punto di accumulazione per A .

Esercizio 57. Stabilire se $\lim_{x \rightarrow 0} [x] \sin(x^{-2})$ esiste: in caso affermativo, calcolarlo e verificare il risultato usando la definizione di limite; in caso negativo, dimostrarlo usando i teoremi noti (per la definizione di $[\]$ vedere l'Esercizio 20 della Settimana 2).

Esercizio 58. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente tale che $f(2n) \geq n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e verificare il risultato usando la definizione di limite.

Esercizio 59. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Dimostrare che f è una funzione costante se e solo se $f(x+y) = f(x)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Esercizio 60. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Dimostrare che f è una funzione affine (cioè $f(x) = ax + b$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}$) se e solo se $f(x+y) = f(x) + (f(1) - f(0)) \cdot y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Esercizio 61. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) f è una funzione costante;

- (ii) esiste il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;
 (iii) esiste il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Esercizio 62. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione affine. Dimostrare che la funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita ponendo

$$(\star) \quad g(y) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R},$$

è una funzione costante.

Esercizio 63. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione quadratica (cioè $f(x) = ax^2 + bx + c$ per qualche $a, b, c \in \mathbb{R}$). Dimostrare che la funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come in $(\star)$ è una funzione affine.

Esercizio 64. Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A e $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Assumiamo che A sia un insieme simmetrico rispetto all'origine, cioè $x \in A$ se e solo se $-x \in A$, e definiamo $y_0 = -x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dimostrare che:

- (i) y_0 è un punto di accumulazione per A ;
 (ii) se f è pari, allora $\lim_{x \rightarrow y_0} f(x) = l$;
 (iii) se f è dispari, allora $\lim_{x \rightarrow y_0} f(x) = -l$.

Esercizio 65. Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A e $l \in \mathbb{R}$. Dato $c \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $g(x) = c \cdot f(x)$ per ogni $x \in A$. Dimostrare che, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c \cdot l$.

Esercizio 66. Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A e $l \in \{\pm\infty\}$. Dato $c \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $g(x) = c \cdot f(x)$ per ogni $x \in A$. Dimostrare che, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \begin{cases} l & \text{se } c > 0; \\ 0 & \text{se } c = 0; \\ -l & \text{se } c < 0. \end{cases}$$

Esercizio 67. Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A e $l \in \mathbb{R}$. Sia $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio. Dimostrare che, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} P(f(x)) = P(l)$. È vero in generale che, se $\lim_{x \rightarrow x_0} P(f(x)) = P(l)$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$?

5. LIMITI ALL'INFINITO

Esercizio 68. Calcolare i seguenti limiti:

- | | |
|--|--|
| (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^{\frac{x^3+5x+2}{x^4+2x+4}}$ | (x) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan \left(\frac{1 + 2 x + x^2}{2 + 3 x + 3\sqrt{ x }} \right)$ |
| (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \left(\frac{6x^2 + x + 2}{3x^2 + 5x + 1} \right)$ | (xi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \left(\frac{x^7 + 5x^2 + 2}{x^5 + 1} \right)$ |
| (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + \cos(2x)}{2x - \sin(3x)}$ | (xii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x)^{\frac{2}{\log(x+5)}}$ |
| (iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2(x) \cos^3(x)}{x + 2}$ | (xiii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^{x+1} - 5^{\sqrt{x^2+1}}$ |
| (v) $\lim_{x \rightarrow 0} 3^{-\frac{1}{x^2}}$ | (xiv) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{x \sin(\frac{1}{x})}$ |
| (vi) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} \cos \left(\frac{3}{x} \right)$ | (xv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(10x + 5 \log(x))$ |
| (vii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\log(x^2 + 1)} - \sqrt{2 \log(x) + 5}$ | (xvi) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left(\frac{3x^2 + 5 \sin(2x)}{2 x - 3 \cos(x)} \right)$ |
| (viii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x \cos(\sin(3x))}{x^2 + 1}$ | (xvii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor \log(\lceil x \rceil) \rfloor$ |
| (ix) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \log(\log(x))$ | (xviii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan \left(\frac{2 + 2x^3 - \lceil x \rceil^4}{1 + 5 x - 7\lfloor x \rfloor^2} \right)$ |

Per la definizione di $\lfloor \cdot \rfloor$ e $\lceil \cdot \rceil$ vedere l'Esercizio 32.

Esercizio 69. Calcolare $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x)$ nei seguenti casi applicando il Teorema di cambio delle variabili nei limiti. Con riferimento all'enunciato di questo risultato, specificare quale tra le ipotesi (i) o (ii) sia verificata.

(i) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(y) = y^2$, $x_0 = 0$

(iii) $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{2}{x^2}\right)$, $g(y) = \sin(y)$, $x_0 = 0$

(ii) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $g(y) = y^4$, $x_0 = +\infty$

(iv) $f(x) = \frac{2 \sin(x) \cos(2x)}{3x^3}$, $g(y) = \cos(y)$, $x_0 = -\infty$

Esercizio 70. Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{x^\gamma - x^2 + x}{x^3 + 7}\right)$ al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$.

Esercizio 71. Determinare, se esistono, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + 3x + 1 + \beta}{\beta x^3 - 3\alpha^2 x^2 + 4} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 72. Per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \frac{\alpha x + 3\beta}{2\alpha\beta + x}$ soddisfa $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$?

Esercizio 73. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 - \alpha x - 2x}{x^2 (\sqrt{1 - 2x} + \sqrt{1 + \alpha x + x^2})}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 74. Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^{5\alpha+3} - 9x}{7|2 + 7x|^{2\alpha+2} - 9x^5}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 75. Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ esistono $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} x^a \sin(x^b)$? Se esistono, calcolarli; se no, dimostrarlo.

Esercizio 76. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - 5x)(e^{3x} - 1)}{\tan^\alpha(x)(2 + \cos(x))}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 77. Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\alpha - e^{\beta x})$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 78. Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\alpha - \log^\beta(x))$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 79. Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 2 \log(\alpha)}{3x}\right)^{2x}$ al variare di $\alpha \in (0, \infty)$.

Esercizio 80. Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A e $f, g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$ tre funzioni. Assumiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ e che h sia limitata definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Dimostrare

che, se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora anche $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + h(x)}{g(x) + h(x)} = \ell$.

Esercizio 81. Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A e $f, g, h: A \subset \mathbb{R}$ tre funzioni tali che:

(i) $\min\{g(x), h(x)\} \leq f(x) \leq \max\{g(x), h(x)\}$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$;

(ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = b \in \mathbb{R}$.

Calcolare $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ quando $a = b$ e verificare il risultato tramite la definizione di limite. Cosa si può dire dell'esistenza e del valore del limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ quando $a \neq b$?

Esercizio 82. Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A e $f, g, h: A \subset \mathbb{R}$ tre funzioni tali che:

(i) $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell \in (0, +\infty)$;

(ii) $2h(x)g(x) \leq f(x) \leq (\ell + h(x))g(x)$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$.

Dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ e che i limiti $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + h(x)}{g(x) + h(x)}$ esistono finiti e coincidono, e se ne calcoli il comune valore.

Esercizio 83. Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A e $f, g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$ tre funzioni tali che:

(i) esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - c|g(x) \leq h(x)$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$;

(ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Calcolare il valore di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e verificare la correttezza del risultato tramite la definizione di limite. Cosa si può dire sulla monotonia della funzione f definitivamente per $x \rightarrow x_0$?

Esercizio 84. Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A e $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni tali che:

- (i) f è limitata definitivamente per $x \rightarrow x_0$ e monotona crescente definitivamente per $x \rightarrow x_0^+$;
- (ii) g è limitata definitivamente per $x \rightarrow x_0$ e monotona decrescente definitivamente per $x \rightarrow x_0^+$.

Dimostrare che i limiti $\lim_{x \rightarrow x_0^+} (f(x) + g(x))$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^+} (g(x) - f(x))$ esistono finiti.

Esercizio 85. Siano $P, Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due polinomi non identicamente nulli. Definiamo

$$m = \max \left\{ k \in \mathbb{N}_0 : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^k} \neq 0 \right\} \quad \text{e} \quad n = \max \left\{ j \in \mathbb{N}_0 : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Q(x)}{x^j} \neq 0 \right\}.$$

Dopo aver controllato che m e n sono ben posti, dimostrare le seguenti affermazioni:

- (i) il grado di P è uguale a m e il grado di Q è uguale a n ;
- (ii) esistono $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^m} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Q(x)}{x^n} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{b}$ se e solo se $m = n$.

6. LIMITI CON O-PICCOLI

Esercizio 86. Calcolare i seguenti limiti:

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\log(1 + 2x)}$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \sin^2(2x))}{4 \tan^3(x) \cos(3x^2)}$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + \sin(x) \tan(x)}{\log(1 + 5x^2)}$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{x^3 + 2 + \sin(x)}{x^3}\right) - 1}{e^{5x^3} - 1 + \cos(x^4)}$
- (v) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^{11} - 4^{11}}{x^{12} - 4^{12}}$
- (vi) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 4\sqrt{x} + 3}{x^2 - 1}$
- (vii) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$
- (viii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin(x)} - e^x}{1 - \cos(\sqrt{x})}$
- (ix) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^3(x^5) + \log(3 + \log(x))}{\log^5(x^3) + \log(\log(x + 3))}$
- (x) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(2x) + e^{5 \tan(5x)} - e^{2 \sin(x)}}{e^{3x} - \cos(4x) + \log(1 + 5x)}$
- (xi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(e^x - 1)}{\tan(x) + \log(1 + 3x)}$
- (xii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin(e^{x^2} - e^{2x})}{3 - 3 \cos(\log(1 + x))}$
- (xiii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{1+x}{2+x^3}\right) \sin\left(\frac{x^3+1}{x^4+1}\right)}{\log\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) \tan\left(\frac{x^3+2}{x^6+3}\right)}$
- (xiv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan(\sin(x))} - 1}{e^{\sin(\tan(x))} - 1}$

Esercizio 87 (Proprietà degli o-piccolo). Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A e $f, g, h, k: A \rightarrow \mathbb{R}$ quattro funzioni. Dimostrare che:

- (i) se $f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$;
- (ii) se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$, allora $|f(x)|^\alpha = o(|g(x)|^\alpha)$ per $x \rightarrow x_0$ per ogni $\alpha > 0$;
- (iii) se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e $h(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x) + h(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e $f(x) - h(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$;
- (iv) se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e $h(x) = o(k(x))$ per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x) \cdot h(x) = o(g(x) \cdot k(x))$ per $x \rightarrow x_0$;
- (v) se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e $g(x) = o(h(x))$ per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x) = o(h(x))$ per $x \rightarrow x_0$;
- (vi) se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e $h(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ e $h(x)$ è limitata definitivamente per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x) \cdot h(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$;
- (vii) se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e $h(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x) \cdot h(x) = o(g(x) \cdot h(x))$ per $x \rightarrow x_0$.

Esercizio 88. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow +\infty$. Discutere l'esistenza e il valore di

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha + x + 2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 89. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = o(e^x)$ per $x \rightarrow +\infty$. Discutere l'esistenza e il valore di

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^{\alpha x} + 5x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 90. Sia $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. Discutere l'esistenza e il valore di

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha + x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 91. Siano $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$ tali che

$$f(x) = x^m + o(x^m) \quad \text{e} \quad g(x) = x^n + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Dimostrare che, se la funzione composta $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è ben definita, allora vale

$$(g \circ f)(x) = x^{mn} + o(x^{mn}) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

N.B. La definizione di O-grande non è nel programma, ma sono esercizi interessanti.

Esercizio 92 (Definizione e proprietà degli O-grande). Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A e $f, g, h, k: A \rightarrow \mathbb{R}$ quattro funzioni. Diciamo che $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x)| \leq C|g(x)|, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Dimostrare che:

- (i) se $f(x) = O(1)$ per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x)$ è limitata definitivamente per $x \rightarrow x_0$;
- (ii) se $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$, allora $|f(x)|^\alpha = O(|g(x)|^\alpha)$ per $x \rightarrow x_0$ per ogni $\alpha > 0$;
- (iii) se $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e $h(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x) + h(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e $f(x) - h(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$;
- (iv) se $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e $h(x) = O(k(x))$ per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x) \cdot h(x) = O(g(x) \cdot k(x))$ per $x \rightarrow x_0$;
- (v) se $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e $g(x) = O(h(x))$ per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x) = O(h(x))$ per $x \rightarrow x_0$;
- (vi) se $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e $h(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ e $h(x)$ è limitata definitivamente per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x) \cdot h(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$;
- (vii) se $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e $h(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x) \cdot h(x) = O(g(x) \cdot h(x))$ per $x \rightarrow x_0$.

Esercizio 93. Determinare per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono verificate le seguenti relazioni:

- (i) $|x|^\alpha = |x|^\beta + o(|x|^\beta)$ per $x \rightarrow 0$;
- (iii) $|x|^\alpha = O(|x|^\beta)$ per $x \rightarrow 0$;
- (ii) $x^\alpha = x^\beta + o(x^\beta)$ per $x \rightarrow +\infty$;
- (iv) $|x|^\alpha = O(|x|^\beta)$ per $x \rightarrow +\infty$.

Esercizio 94. Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A e $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Assumiamo che $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Dimostrare che, se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ allora } f(x) = O(g(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0. \text{ Cosa si può dire del viceversa?}$$

Esercizio 95. Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A e $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Assumiamo che $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Dimostrare che, se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$, allora $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$. Cosa si può dire del viceversa?

Esercizio 96. Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A e $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Dimostrare che, se $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$, allora $f(x)$ è definitivamente limitata per $x \rightarrow x_0$. Cosa si può dire di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ al variare di $\ell \in \mathbb{R}$?

Esercizio 97. Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0^+$ delle seguenti funzioni e disporle in ordine di infinitesimo crescente:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}, \quad g(x) = \log(1 + 3x^3), \quad h(x) = x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}, \quad i(x) = \sqrt{1 + x^2} - \cos(x).$$

7. SUCCESSIONI

Esercizio 98. Calcolare il limite di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ per $n \rightarrow +\infty$ nei seguenti casi:

(i) $a_n = \frac{n^{2n}}{(n+2)^{2n}}$	(ix) $a_n = \frac{9n^3 + 3n - 1}{7n^2 + 4n}$
(ii) $a_n = \frac{n! \log^3(n)}{n^n}$	(x) $a_n = \frac{(-1)^n n^2 + n}{n^3 + 1}$
(iii) $a_n = \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^{2 + \frac{1}{2n}}}$	(xi) $a_n = \frac{-2n^2 + 4n + 3}{3n^5 - 4n^4}$
(iv) $a_n = \frac{(2n)^n \sin(n) + n^{2n}}{(n+2)^{2n} + n!}$	(xii) $a_n = \log_5(n+3) - \log_5\left(\sqrt[7]{n^7 + 5n^5}\right)$
(v) $a_n = \frac{\log((n+4)!) - \log(n!)}{n(\sqrt[n]{n^5} - 1)}$	(xiii) $a_n = n \log\left(1 + \sin\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right)$
(vi) $a_n = \sqrt[n]{n!}$	(xiv) $a_n = \frac{\log(\log(n))}{1 + \log^2(n)}$
(vii) $a_n = n e^{\sin(\frac{1}{n})} - n$	(xv) $a_n = n! \frac{\arcsin(\frac{1}{n!})}{\arccos(\frac{1}{n!})}$
(viii) $a_n = \frac{5}{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} - 1}$	(xvi) $a_n = n^2 \sin\left(\log\left(1 + \sin\left(\frac{3}{n^2}\right)\right)\right)$

Esercizio 99. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita per ricorrenza ponendo $a_1 = \alpha$ e $a_{n+1} = \alpha a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Discutere la convergenza di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 100. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita per ricorrenza ponendo $a_1 = \alpha$ e $a_{n+1} = a_n^m$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Discutere la convergenza di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 101. Dimostrare che la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita ponendo

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

è convergente.

Esercizio 102. Dimostrare che la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita ponendo

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

è convergente e che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \in (0, 2]$.

Esercizio 103. Dimostrare col criterio del rapporto che, per ogni $\varepsilon \in (0, e)$, esiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left(\frac{n}{e + \varepsilon}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n}{e - \varepsilon}\right)^n \quad \text{per ogni } n \geq N_\varepsilon.$$

Cercare online la formula di Stirling e riflettere su quanto dimostrato.

8. FUNZIONI CONTINUE E DERIVABILI

Esercizio 104. Siano $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ e $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$. Dimostrare le seguenti affermazioni:

- (i) se f e g sono crescenti, allora anche $f + g$ e, se $f, g > 0$, $f \cdot g$ sono crescenti;
- (ii) se f e g sono decrescenti, allora anche $f + g$ e, se $f, g > 0$, $f \cdot g$ sono decrescenti;
- (iii) se f è crescente, allora $-f$ è decrescente;
- (iv) se f è decrescente, allora $-f$ è crescente.

Supponiamo ora che f e g siano crescenti con $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$. Cosa si può dire della monotonia delle funzioni $f - g$ e f/g ?

Esercizio 105 (Algebra delle derivate). Sia $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Dimostrare che, se $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ sono derivabili in $x_0 \in I$, allora:

- (i) $\alpha f + \beta g$ è derivabile in x_0 , con $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- (ii) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 , con $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$;
- (iii) se $g(x_0) \neq 0$, f/g è derivabile in x_0 , con $(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Esercizio 106. Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale $(x^n)' = nx^{n-1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 107. Siano $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che la derivata P' è ancora un polinomio e calcolarne il grado e i coefficienti.

Esercizio 108. Siano $L \in [0, +\infty)$, $\alpha \in (0, 1]$, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$ per ogni $x, y \in A$. Dimostrare che $f \in C^0(A)$. Cosa si può dire della derivabilità di f in A ?

Esercizio 109. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione seguente è continua su $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \cos(\pi x)}{1 + x^2} & \text{per } x \leq 0 \\ \frac{(1 + x^3)^\alpha - e^{x^4}}{5x^3 + x \log(1 + x^2)} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Esercizio 110. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione seguente è continua su $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ |x|^{2\alpha} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Esercizio 111. Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$. Dimostrare le seguenti affermazioni:

- (i) se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, allora f ammette massimo in $\mathbb{R}$;
- (ii) se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, allora f ammette massimo in $\mathbb{R}$;
- (iii) se f è pari e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, allora f ammette minimo su $\mathbb{R}$;
- (iv) se f è dispari e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \in \{\pm\infty\}$, allora $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Esercizio 112. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua tale che $f(a) > a$ e $f(b) < b$. Dimostrare che esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = c$.

Esercizio 113. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua e monotona *crescente*. Fissiamo $x_0 \in [a, b]$ e definiamo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ponendo $x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$. Dimostrare le seguenti affermazioni:

- (i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ è convergente;
- (ii) il limite di $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una soluzione di $f(x) = x$ per $x \in [a, b]$;
- (iii) la soluzione del punto precedente in generale *non* è unica.

Suggerimento: Per il punto (iii), considerare $f(x) = x$ per ogni $x \in [0, 1]$.

Esercizio 114. Dimostrare che esiste un'unica soluzione di $x^5 + x^3 = 2$ per $x \in [-\frac{1}{2}, 2]$.

Esercizio 115. Dimostrare che esiste un'unica soluzione di $x \log x = 1$ per $x \in [e^{-1}, e]$.

Esercizio 116. Dimostrare che esiste un'unica soluzione di $e^{\cos(x)-x} = x$ per $x \in (0, \pi)$.

Esercizio 117. Dimostrare che, per ogni $a > 0$, esiste un unico $b \in \mathbb{R}$ tale che $ba^b = 0$.

Esercizio 118. Dimostrare che $x^8 + 5x^5 - 4x^4 - 2x + e^{\frac{1}{1+|x|^2}} = 9$ ha almeno due soluzioni in $\mathbb{R}$.

Esercizio 119. Sia $f(x) = e^{x^2} + \log(2x^2 - 1) - 10$.

- (i) Determinare il dominio e l'insieme dei punti di continuità di f .
- (ii) Dimostrare che esiste una soluzione di $f(x) = 0$ per $x \in [1, 2]$.
- (iii) Lo zero di f trovato in (ii) è anche unico in $[1, 2]$?
- (iv) Ci sono altri zeri di f al di fuori di $[1, 2]$?

Esercizio 120. Discutere l'esistenza delle soluzioni di $x + a = \frac{x}{2^x}$ in $(2, +\infty)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 121. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (A) f è continua in x_0 ed esistono $m, q \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) = mx + q + o(|x - x_0|)$ per $x \rightarrow x_0$;
 (B) f è derivabile in x_0 .

Esercizio 122. Dati $c \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, trovare $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e non costante tale che $x \cdot f'(x) + cn = n \cdot f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 123. Dato $c \in \mathbb{R}$, trovare $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e non costante tale che $f(x) = f'(x) + c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 124. Dato $c \in \mathbb{R}$, trovare $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili e non costanti tali che $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = c - f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 125. Siano $I = (0, +\infty)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *omogenea di grado α* se $f(xy) = y^\alpha f(x)$ per ogni $x, y \in I$. Dimostrare le seguenti affermazioni:

- (i) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è omogenea di grado α se e solo se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = mx^\alpha$ per ogni $x \in I$;
- (ii) f è continua su I ;
- (iii) f è derivabile su I ;
- (iv) $x \cdot f'(x) = \alpha \cdot f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 126. Sia $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tale che $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ per ogni $x, y \in [0, 1]$.

- (i) Dimostrare che $f \in C^0([0, 1])$.
- (ii) Dimostrare che la funzione $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $g(x) = |f(x) - x|$ per ogni $x \in [0, 1]$ ammette punti di minimo in $[0, 1]$.
- (iii) Dimostrare che $g([0, 1]) \subseteq [0, 1]$.
- (iv) Sia $x_0 \in [0, 1]$. Dimostrare che, se $g(x_0) > 0$, allora $g(f(x_0)) < g(x_0)$.
- (v) Dimostrare che esiste un unico $c \in [0, 1]$ tale che $f(c) = c$.

Esercizio 127. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e sia $f \in C^0([a, b])$ tale che $f(a) < 0 < f(b)$. Si consideri l'insieme

$$S = \{y \in [a, b] : f(x) < 0 \text{ per ogni } x \in [a, y]\}.$$

- (i) Dimostrare che $S \neq \emptyset$.
- (ii) Sia $c = \sup S$. Dimostrare che $c > a$. *Suggerimento:* usare la continuità di f in a .
- (iii) Dimostrare che $S = [a, c)$. *Suggerimento:* Per dimostrare che $[a, c) \subseteq S$, procedere per assurdo.
- (iv) Dimostrare che $f(x) < 0$ per ogni $x \in S$. *Suggerimento:* Procedere per assurdo.
- (v) Dimostrare che $c < b$. *Suggerimento:* Procedere per assurdo.
- (vi) Dimostrare che $f(c) \leq 0$. *Suggerimento:* Usare la continuità di f in c .
- (vii) Dimostrare che $f(c) = 0$. *Suggerimento:* Se fosse $f(c) < 0$, allora $f < 0$ in un intorno di c .

Quella sopra è una dimostrazione del Teorema di Bolzano alternativa al metodo di bisezione visto in aula. Osservare che $c \in (a, b)$ trovato sopra potrebbe essere tale che $f(x) < 0$ per $x \in (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$ per qualche $\delta > 0$. Costruire un esempio di quest'ultimo caso.

9. DERIVATE E CALCOLO

Esercizio 128. Usando il teorema per la derivata della funzione inversa, calcolare la derivata di:

- | | |
|----------------------------------|---|
| (i) $\arcsin(x)$ | (v) $\operatorname{arccosh}(x)$ |
| (ii) $\arccos(x)$ | (vi) $\operatorname{arctanh}(x)$ |
| (iii) $\arctan(x)$ | (vii) $\log(x)$ |
| (iv) $\operatorname{arcsinh}(x)$ | (viii) $x^{\frac{1}{n}}$ con $n \in \mathbb{N}$ |

Esercizio 129. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni nei punti del loro dominio:

- | | |
|---|---------------------------------------|
| (i) $\frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$ | (iv) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ |
| (ii) $\left(\frac{1 + x^2}{1 + x}\right)^5$ | (v) $(x \cot x)^2$ |
| (iii) $x\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x^2}}$ | (vi) $\sqrt{\log x}$ |
| | (vii) $\sqrt[3]{\frac{1}{1 + x^2}}$ |

- | | |
|---|--|
| (viii) $\frac{1}{2 \sin x \cos x}$ | (xvi) $x \sinh x$ |
| (ix) $\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}$ | (xvii) $\cosh(\sinh(x))$ |
| (x) $\log_3 x^2 - 1$ | (xviii) $\arccos(\tanh(2x))$ |
| (xi) $\log \left(\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} \right)$ | (xix) x^x |
| (xii) $e^{kx} \sin(\omega x + \varphi)$ con $k, \omega, \varphi \in \mathbb{N}$. | (xx) $(\cos x)^{\sin x}$ |
| (xiii) $\arcsin \left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \right)$ | (xxi) $\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ |
| (xiv) $x \arctan \left(\frac{x-1}{x+1} \right) - \log(\sqrt{x^2 + 1})$ | (xxii) $\left(\sqrt{\tan x} \right)^{x+1}$ |
| (xv) $\log \left(\sin \left(\sqrt[3]{\arctan(e^{2x})} \right) \right)$ | (xxiii) $\sqrt{\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}}$ |
| | (xxiv) $1 + \frac{2^{x+1}}{2^x - 1}$ |

Esercizio 130. Calcolare le derivate ed i punti di non derivabilità delle seguenti funzioni

- | | |
|---|--|
| (i) $f(x) = \log x - 3 $ | (iv) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + x^2 - x }}$ |
| (ii) $f(x) = x^2 \exp \left(\frac{ x - 1}{x} \right)$ | (v) $f(x) = e^{\sin x} \sin x $ |
| (iii) $f(x) = \frac{x \log x }{(\log x - 1)^2}$ | |

Esercizio 131. Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \sin(x)$ in $x = 1$.

Esercizio 132. Determinare l'equazione delle due rette passanti per $(1, -3)$ e tangenti al grafico di $y = x^2$.

Esercizio 133. Trovare $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $y = ax^2 + bx + c$ passi per $(1, 2)$ e sia tangente a $y = x$ in $(0, 0)$.

Esercizio 134. Dato $c \in \mathbb{R}$, trovare $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili e non costanti tali che $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = f(x) - cx$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 135. Dimostrare che $\sqrt[3]{x^2}$ ha una *cuspid*e in $x_0 = 0$.

Esercizio 136. Studiare continuità e derivabilità in $x_0 = 0$ di

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n |x| & \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

al variare di $n \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 137. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x + x^2) & \text{per } x \in [0, +\infty), \\ x & \text{per } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Determinare insieme di continuità di f , insieme di derivabilità di f , e stabilire se $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 138. Per ciascun $n \in \mathbb{N}_0$, definiamo

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \left(\frac{1}{x} \right) & \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

Dimostrare le seguenti affermazioni:

- (i) $f_0 \notin C^0(\mathbb{R})$;
- (ii) $f_1 \in C^0(\mathbb{R})$, ma f_1 non è derivabile in $x_0 = 0$;
- (iii) $f_2 \in C^0(\mathbb{R})$, f_2 è derivabile in $x_0 = 0$, ma $f_2 \notin C^1(\mathbb{R})$;
- (iv) $f_n \in C^1(\mathbb{R})$ per ogni $n \geq 3$.

Esercizio 139. Siano $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \dots, a_{2n+1} \in \mathbb{R}$ con $a_{2n+1} \neq 0$ e $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il polinomio dato da

$$P(x) = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i x^i \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $P(x_0) = 0$.

Esercizio 140. Siano $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_{2n} \in \mathbb{R}$ e $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il polinomio dato da

$$P(x) = \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che, se

$$a_{2n} \sum_{i=0}^{2n} a_i < 0,$$

allora esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 \neq x_2$, tali che $P(x_1) = P(x_2) = 0$.

Esercizio 141. Siano $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in \mathbb{R}$ con $g(x_0) = h(x_0)$ e $g'(x_0) = h'(x_0)$. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Dimostrare che esiste il prolungamento per continuità $\tilde{f}$ di f in x_0 e che $\tilde{f}$ è derivabile in x_0 .

Esercizio 142. Sia $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = \frac{1}{x}$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dimostrare che

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-1-n} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Suggerimento: Procedere per induzione.

Esercizio 143. Sia $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dimostrare che

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n-1)}{2^n} x^{-n-\frac{1}{2}} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Suggerimento: Procedere per induzione.