

Analisi Matematica 1, 28/08/25

Cognome Nome Matr.
Corso di studi ... Fisica – Astronomia ... Anno accademico 24/25 – precedente

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.

1. Dato $A \subset \mathbb{R}$ dare la definizione di massimo di A . Dimostrare che se l'insieme A ammette massimo, allora il massimo è unico.
2. Enunciare il teorema di Rolle e dimostrarlo.
3. Usare un risultato del corso, di cui si scriverà l'enunciato, per giustificare la disuguaglianza

$$0 < \int_1^2 e^{-x^2} dx < \frac{1}{2}$$

4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte. Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa e giustificare:

se $f(x) = -x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$, allora 0 è un punto di massimo locale per f .

Analisi Matematica 1, 28/08/25

Parte di esercizi.

Cognome Nome Matr.
Corso di studi ... Fisica – Astronomia ... Anno accademico 24/25 – precedente

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

(A) Trovare tutte le primitive seguenti

$$\int (1 - 2x) \log(1 + \sqrt{x}) \, dx$$

(B) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = (1 + y^2)(1 - 2x) \log(1 + \sqrt{x}). \quad (1)$$

(C) Trovare le soluzioni della equazione (1) che soddisfano la condizione iniziale $y(1) = \tan(11/12)$.

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \sqrt{3 - 4 \sin^2(x)}$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f , i *limiti notevoli* di f , gli eventuali asintoti .
- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$
- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata, gli intervalli di monotonia di f , i punti di estremo locale e la loro natura:

- tracciare il grafico qualitativo di f :

usare questo spazio per eventuali calcoli supplementari: indicare l'esercizio

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

Dato $z \in \mathbb{C}$, $\bar{z}$ è il suo coniugato, mentre $|z|$ denota il suo modulo.

1) Risolvere l'equazione seguente in $\mathbb{C}$

$$\bar{z}^4 = (1 + \sqrt{3}i)^2 |z|^2$$

2) Disegnare le soluzioni nel piano complesso

Esercizio 4 [con svolgimento, 6 punti]

(i) Scrivere lo sviluppo di Taylor di grado 4 in $x_0 = 0$ delle funzioni seguenti

$$f(x) = (e^{2x} - 1)^2$$

$$g(x) = \sinh^2(2x)$$

(ii) Calcolare in funzione di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(e^{2x} - 1)^2 - \sinh^2(2x)}{\sin(2x^\alpha) - x^3}$$