

1. Usiamo i seguenti sviluppi

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$\Rightarrow e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + \frac{1}{2} (2x^2)^2 + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3} x^4 + o(x^4)$$

Perciò:

$$e^{2x^2} - \cos x - \frac{5}{2} \sin^2 x = 2x^2 + 2x^4 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

$$= \frac{67}{24} x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

$$\text{Poiché } x^\alpha + x^4 = \begin{cases} x^4 + o(x^4) & \text{per } \alpha > 4 \\ 2x^4 + o(x^4) & \text{per } \alpha = 4 \\ x^\alpha & \text{per } \alpha < 4 \end{cases}$$

Si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha + x^4}{e^{2x^2} - \cos x - \frac{5}{2} \sin^2 x} = \begin{cases} \frac{24}{67} & \text{se } \alpha > 4 \\ \frac{48}{67} & \text{se } \alpha = 4 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 4 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \left| 1 - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \sqrt{1+x^2} \right|$$

Studiamo prima $g(x) = 1 - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \sqrt{1+x^2}$

così $f(x) = |g(x)|$.

$\operatorname{dom} g = \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$g(0+) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$g(0-) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -1$$

$$e \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + x = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{1+x^2} =$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{1+x^2}} = 1$$

$\Rightarrow y = -x + 1$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$

Similmente

$y = x + 1$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{1}{x})^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{2} - x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} \end{aligned}$$

Inoltre $f'(0+) = \sqrt{2} = f'(0-)$

Studiamo $\text{sgn } f' = \text{sgn} (\sqrt{2} - x\sqrt{1+x^2})$

$$\sqrt{2} \geq x\sqrt{1+x^2} \quad \forall x \leq 0$$

e se $x > 0$

$$\Leftrightarrow 2 \geq x^4 + x^2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 \leq 0$$

$$\text{me } 0 < x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = 1$$

↑ unico valore

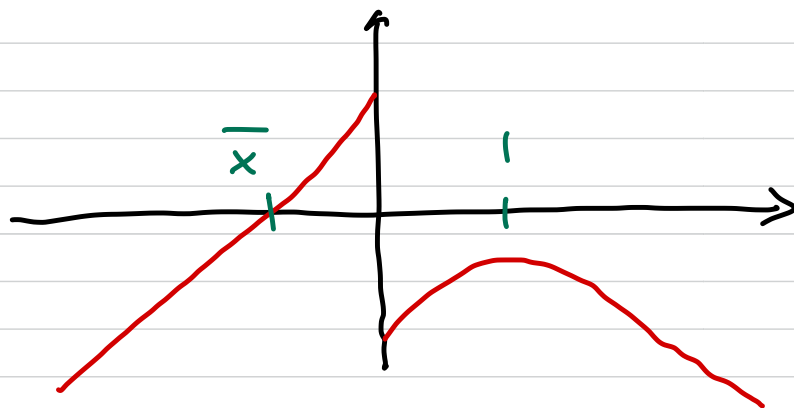
$$\Leftrightarrow 0 < x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$$

Perciò

$\text{sgn } f'$:

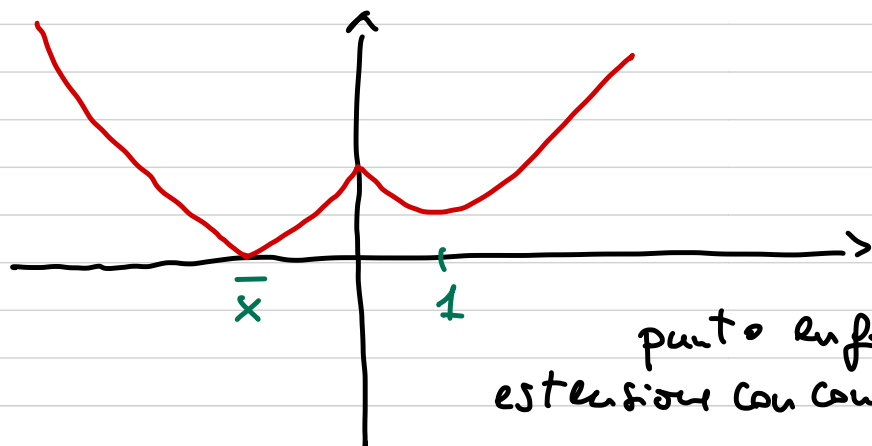
f ha un massimo locale stretto in $x = 1$.

Di conseguenza il suo prefisso è $(f(1) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi - \sqrt{2} < 0)$



Poiché f è strettamente crescente in $]-\infty, 0[$ se per di più $\bar{x} < 0$ tale che $f(\bar{x}) = 0$. Non possiamo conoscere $f'(\bar{x})$ ma $f'(\bar{x}) > 0$

Ne risulti il grafico di f



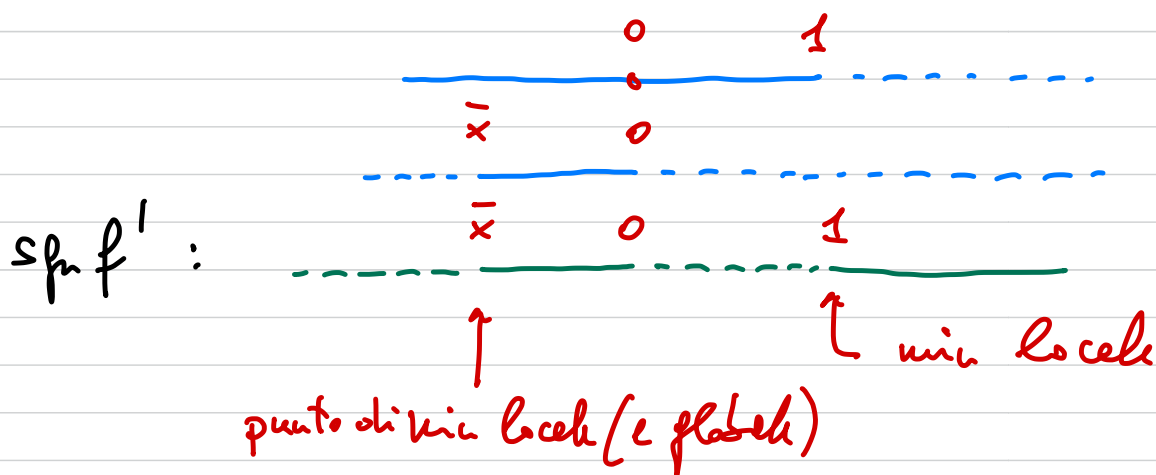
punto angoloso in $\bar{x}$
estensione con continuità in 0.

di cui possiamo esplicitare lo studio:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

le asintoti obliqui $y = x - 1$ per $x \rightarrow +\infty$
e $y = -x - 1$ per $x \rightarrow -\infty$

$$f'(x) = \operatorname{sgn} f(x) \cdot \operatorname{sgn} f'(x) \quad \text{per } x \neq \bar{x}$$



f è strett. decrescente in $]-\infty, \bar{x}]$ e in $]0, 1]$

f è strett. crescente in $[\bar{x}, 0[$ e in $[1, +\infty[$.

3. Poiché $z^2 - 5z + 6 = 0$

$$\text{per } z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

l'integrale generale di

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$\text{è } y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

≡ Cerchiamo un integrale particolare di

$$y'' - 5y' + 6y = \sin x$$

(*)

nelle forme $y(x) = e \cos x + b \sin x$

Deve risultare

$$y'' - 5y' + 6y = 5((e+b) \sin x + (e-b) \cos x) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e+b = \frac{1}{5} \\ e-b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow e=b = \frac{1}{10}$$

Perciò l'integrale generale di

$$y'' - 5y' + 6y = \sin x$$

è

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{10} (\cos x + \sin x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4. $I_4 \int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx =$ sostituiamo $y = e^x$
 $"dy = \frac{dy}{dx}"$

$$= \int \frac{y+1}{(y^2+1)y} dy = \int \left(\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{y(1+y^2)} \right) dy$$

$$= \arctan(y) + \int \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2} \right) dy$$

$$= \arctan(e^x) + x - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x}) + C \equiv F(x)$$

$$\text{Se } -\log \sqrt{2} = F(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 + C$$

$$\Rightarrow C = -\frac{\pi}{4}$$

Infine

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan e^x}{x} + 1 - \frac{1}{2} \frac{\log(1+e^{2x})}{x}$$

ma per de l'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+e^{2x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} = 2.$$

Però $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ cioè $F(x) = o(x)$
 per $x \rightarrow +\infty$.