

Analisi Matematica 1, 02/07/25

Cognome Nome Matr.
Corso di studi ... Fisica – Astronomia ... Anno accademico 24/25 – precedente

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.

1. Sia (a_n) successione limitata e (b_n) successione convergente a un limite $L \in \mathbb{R}, L \neq 0$. E' vero che la successione (c_n) definita da $c_n = a_n/b_n$ è limitata? Giustificare
2. Enunciare il teorema sulla permanenza del segno per i limiti di funzione. Illustrarlo su un esempio.
3. Enunciare il teorema di Taylor con resto in forma di Lagrange. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 di $f(x) = \log x$ nel punto $x_0 = 2$.
4. Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa e giustificare:
se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e $f'(x) \geq \frac{1}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow -\infty$.

Analisi Matematica 1, 02/07/25

Parte di esercizi.

Cognome Nome Matr.
Corso di studi ... Fisica – Astronomia ... Anno accademico 24/25 – precedente

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

(A) Trovare $a, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che per $x \rightarrow 0$

$$e^{2x^2} - \cos x - \frac{5}{2} \sin^2 x = ax^\gamma + o(x^\gamma)$$

(B) al variare di $\alpha > 0$ calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha + x^6}{e^{2x^2} - \cos x - \frac{5}{2} \sin^2 x}$$

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \left| 1 - \sqrt{2} \arctan \frac{1}{x} - \sqrt{1+x^2} \right|$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f , i *limiti notevoli* di f , gli eventuali asintoti .
- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$
- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata, gli intervalli di monotonia di f , i punti di estremo locale e la loro natura:

- tracciare il grafico qualitativo di f :

usare questo spazio per eventuali calcoli supplementari: indicare l'esercizio

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

1) Risolvere l'equazione differenziale

$$u'' - 5u' + 6u = 0$$

2) Risolvere l'equazione differenziale

$$u'' - 5u' + 6u = \sin t$$

Esercizio 4 [con svolgimento, 6 punti]

Tra tutte le primitive seguenti

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx$$

- (i) determinare quella primitiva F che soddisfa $F(0) = -\log \sqrt{2}$,
- (ii) mostrare che $F(x) = o(x)$ per $x \rightarrow +\infty$.