

Analisi Matematica 1, 18/06/25

Cognome Nome Matr.
Corso di studi ... Fisica – Astronomia ... Anno accademico 24/25 – precedente

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.

1. Una successione monotona decrescente e limitata è convergente. Quale è il suo limite? Giustificare la propria affermazione.
2. Dare la definizione di funzione composta. Enunciare il teorema sul limite della funzione composta.
3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. E vero che se $f(x) = o(x)$ allora $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$? Giustificare.
4. Dare la definizione di f strettamente crescente su un intervallo. Dimostrare che se $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e $f'(x) > 0$ per $x \in]a, b[$, allora f è strettamente crescente nel medesimo intervallo.

Analisi Matematica 1, 18/06/25

Parte di esercizi.

Cognome Nome Matr.
Corso di studi ... Fisica – Astronomia ... Anno accademico 24/25 – precedente

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

(A) Dato $\alpha > 0$ trovare lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 (con il polinomio di Taylor di grado 4) della seguente funzione a partire da $x_0 = 0$

$$f(x) = e^{1-\cos x} - \cosh(\alpha x)$$

(B) Al variare di $\beta > 0$ calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\beta}{e^{1-\cos x} - \cosh(\alpha x)}$$

per i due valori $\alpha = 1$ e poi $\alpha = 2$.

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = -\arctan\left(\sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x - 2}}\right).$$

Indicazione: lo studio degli zeri e del segno della derivata richiede una analisi.

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f , i *limiti notevoli* di f , gli eventuali asintoti .

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata, gli intervalli di monotonia di f , i punti di estremo locale e la loro natura:

- tracciare il grafico qualitativo di f :

usare questo spazio per eventuali calcoli supplementari: indicare l'esercizio

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

1) Risolvere l'equazione

$$z^3 - (\bar{z})^2 = 0$$

2) disegnare le soluzioni nel piano complesso

Esercizio 4 [con svolgimento, 6 punti]

1. Tra le primitive seguenti

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} \arctan x \, dx$$

determinare quella che vale 2 in $x = 0$.

2. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} \arctan x \, dx$$