

1

$$f(x) = e^{2x} \cos(5e^x + 3)$$

può in generale

$$f(x) = e^{2x} \cos(ae^x + b) \quad \text{con } a \neq 0$$

$$\int e^{2x} \cos(ae^x + b) dx$$

pongo $y = e^x \Rightarrow dx = \frac{dy}{y}$

$$\int y^2 \cos(ay + b) \frac{dy}{y}$$

pongo $u = ay + b \Rightarrow y = \frac{u-b}{a} \quad dy = \frac{du}{a}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} \int (u-b) \cos(u) du$$

$$= \frac{1}{a^2} \int u \cos(u) du - \frac{b}{a^2} \int \cos(u) du$$

ora $\int u \cos(u) du = \cos(u) + u \sin(u)$ *per parti.*

$$\Rightarrow F = \frac{1}{a^2} (\cos(u) + u \sin(u)) - \frac{b}{a^2} \sin(u)$$

Ne segue

$$F(x) = \frac{1}{a^2} \left(\cos(ae^x + b) + ae^x \sin(ae^x + b) \right)$$

usando le due relazioni tra u , y , x .

$$\text{Dunque} \quad \int_t^0 f(x) dx = F(0) - F(t)$$

$$\text{ma} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = \frac{\cos(b)}{a^2}$$

quindi il limite è finito.

2

$$f(x) = \frac{x}{|x-1|} \log |x|.$$

dominio $x \neq 0$ e $x \neq 1$.

si vede subito che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

molte

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log x}{1-x} = -1$$

diversi!
"salto"
in $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

perché $x \log |x| \rightarrow 0$
 $x \rightarrow 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x-1-\log x}{(x-1)^2} & x > 1 \\ \frac{1-x+\log x}{(x-1)^2} & 0 < x < 1 \\ \frac{1-x-\log(-x)}{(x-1)^2} & x < 0 \end{cases}$$

noto che
le due
espressioni
sono una
l'opposto
dell'altra.

qui devo
fare
attenzione!

○ Osservo che $x-1 - \log x > 0$ per $x > 1$

infatti $g(x) = x-1 - \log x$ soddisfa $\uparrow$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$$

Ne segue che $f'(x) > 0$ in $x > 1$

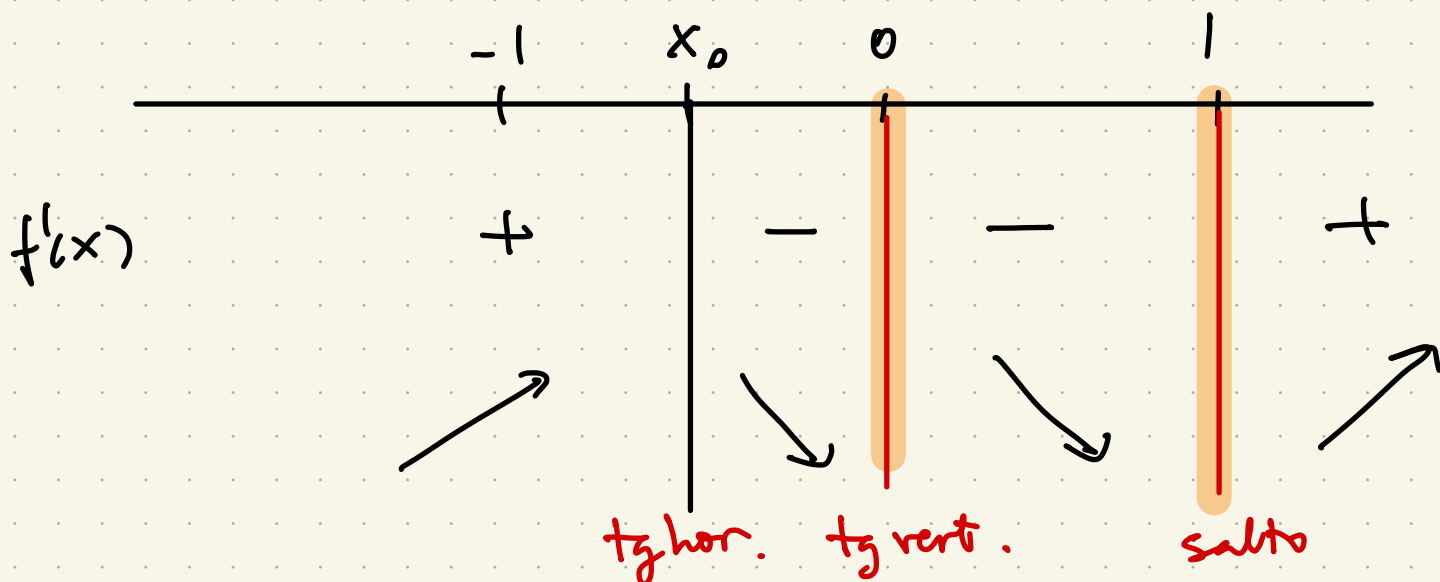
○ Analogamente si vede che

$$1-x + \log x < 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 1$$

da cui $f'(x) < 0$ per $0 < x < 1$

○ D'altra parte $h(x) = 1-x - \log(-x)$
cambia segno su $]-\infty, 0[$ in
quanto $h(-1) = 2 > 0$
mentre $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty$

Dunque $\exists x_0 \in]-1, 0[$ t.c. $h(x_0) = 0$
(e quindi anche $f'(x_0) = 0$)

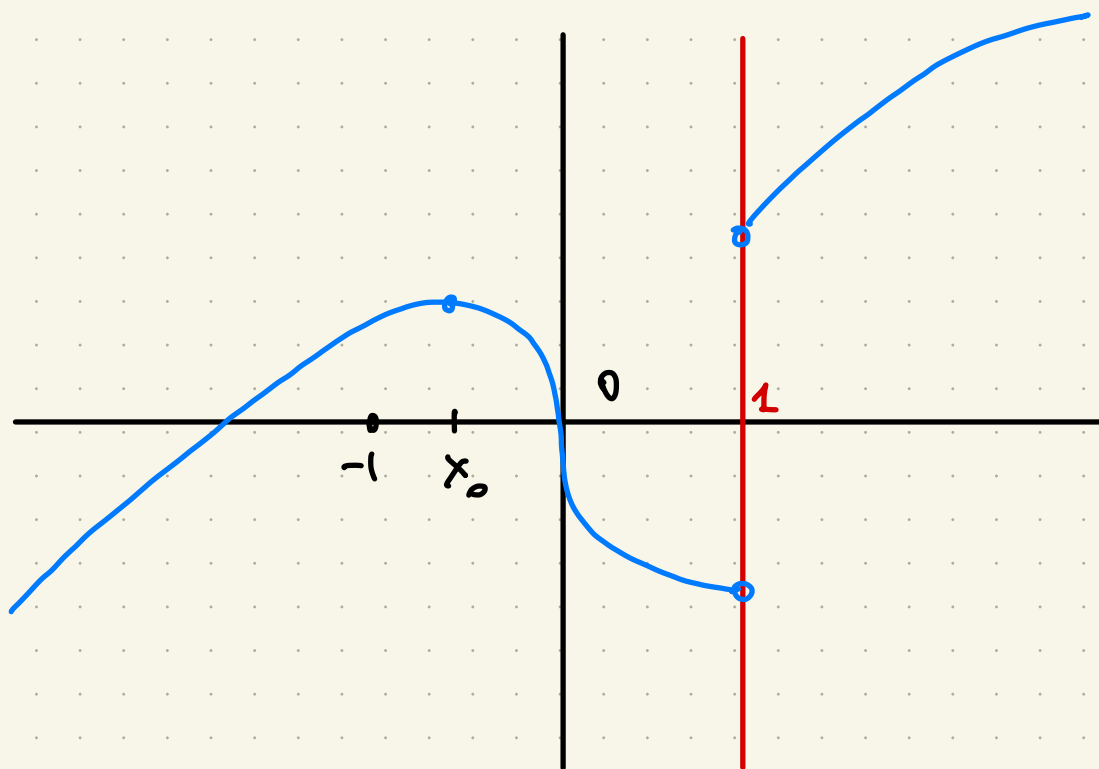


notiamo che in

$x=x_0$ la f ha max locale e
tangente orizzontale

$x=0$ la f soddisfa $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$
quindi tangente verticale

$x=1$ la f non è definita ma
c'è un salto.



3

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t} \quad (E)$$

sol (H) $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$

(E) $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$

con condiz iniziali $y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

$$y(t) = \frac{1}{2} t(2+t) e^{2t}.$$

4

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2x} - 1 - x \log(x^2)}{\log x (x^2 \log x - \sin^2 x)}$$

si ha

$$x^{2x} = e^{2x \log x}$$

$$= 1 + 2x \log x + \frac{4x^2 \log^2 x}{2} + o(x^2 \log^2 x)$$

essendo $x \log(x^2) = 2x \log x$ si ha

$$N(x) = 2x^2 \log^2 x + o(x^2 \log^2 x)$$

numeratore

D' allora forte

$$D(x) = \log x (x^2 \log x - \sin^2 x)$$

denom.

$$= x^2 \log^2 x - \sin^2 x \log x$$

$$= x^2 \log^2 x + o(x^2 \log^2 x)$$

in quanto $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x \log x}{x^2 \log^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log x} = 0$

Allora

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{N(x)}{D(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 \log^2 x + o(x^2 \log^2 x)}{x^2 \log^2 x + o(x^2 \log^2 x)} = 2.$$