

Analisi Matematica 1, 13/02/25

Cognome Nome Matr.
Corso di studi ... Fisica – Astronomia ... Anno accademico 24/25 – precedente

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.

1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato.
 - Dare la definizione di estremo inferiore di A .
 - Fornire un esempio di tale A il cui estremo inferiore non sia punto di accumulazione.
2. Enunciare il teorema di Lagrange. Indicare poi una ipotesi del teorema che è necessaria, fornendo un controesempio.
3. Enunciare il teorema di Weierstrass. Dare un esempio, se esiste, in cui la conclusione del teorema è vera ma le ipotesi non sono soddisfatte.
4. Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue e sia $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.
Dimostrare che vale la disuguaglianza $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Analisi Matematica 1, 13/02/25

Parte di esercizi.

Cognome Nome Matr.
Corso di studi ... Fisica – Astronomia ... Anno accademico 24/25 – precedente

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

(A) Calcolare una primitiva F della funzione

$$f(x) = e^{2x} \cos(5e^x + 3)$$

(B) Stabilire se il limite seguente esiste e, nel caso, calcolarlo:

$$L = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^{2x} \cos(5e^x + 3) dx$$

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x}{|x-1|} \log |x|$$

Indicazione: lo studio degli zeri e del segno della derivata richiede una analisi.

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f , i *limiti notevoli* di f , gli eventuali asintoti .

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata, gli intervalli di monotonia di f , i punti di estremo locale e la loro natura:

- tracciare il grafico qualitativo di f :

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

- 1) Scrivere tutte le soluzioni della equazione differenziale omogenea

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

- 2) Scrivere tutte le soluzioni della equazione differenziale non omogenea

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

- 2) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 4 [con svolgimento, 6 punti]

Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2x} - 1 - x \log(x^2)}{\log x (x^2 \log x - \sin^2 x)}$$