

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.

1. Data $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e dato $x_0 \in \mathbb{R}$. Dare la definizione di
 - a. x_0 punto di minimo locale per f .
 - b. x_0 punto di accumulazione per A .
2. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale e illustrarlo su un esempio.
3. Enunciare il teorema sulla somma dei limiti per le funzioni e dimostrarlo
4. La successione reale $(a_n)_{n \geq 1}$, con $a_n = \frac{\sin(e^n)}{\cos(e^{-n})}$, ammette una sottosuccessione convergente?

1. 2. 3. Vedere lezioni

4. Possiamo notare $|\sin(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Inoltre siccome $0 < e^{-n} < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
e la funzione $\cos$ è decrescente su $[0, 1]$
allora $\alpha := \cos(1) \leq \cos(e^{-n}) \leq \cos(0) = 1$.

$\uparrow$
numero positivo

Donque $|a_n| = \left| \frac{\sin(e^n)}{\cos(e^{-n})} \right| \leq \frac{1}{\alpha}$

$\hat{=}$ limitata, quindi ammette
una sottosucc. conv.

* vedere commenti a pagina 7.

Cognome Nome Matr.
 Corso di studi Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

(A) Calcolare l'insieme di tutte le primitive della funzione

$$\int \frac{x e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx$$

(B) Utilizzando l'espressione della primitiva trovata al punto (A), stabilire se il seguente limite è finito o infinito e, nel primo caso, calcolare il valore

$$L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{x e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx$$

(A) Osservo che $\frac{d}{dx} \sqrt{e^{2x} - 1} = \frac{1 \cdot e^{2x}}{2 \sqrt{e^{2x} - 1}}$

Da qui $\int x \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx = x \sqrt{e^{2x} - 1} - \int \sqrt{e^{2x} - 1} dx$
 studio questo.

$\int \sqrt{e^{2x} - 1} dx$ pongo $u = \sqrt{e^{2x} - 1}$
 $u^2 + 1 = e^{2x}$
 $x = \frac{1}{2} \log(u^2 + 1)$
 $dx = \frac{1 \cdot 2u}{2(u^2 + 1)} du$

$\int \frac{u^2}{u^2 + 1} du$

$\int 1 - \frac{1}{u^2 + 1} du = u - \arctan(u)$

$= \sqrt{e^{2x} - 1} - \arctan(\sqrt{e^{2x} - 1})$

Allora

$$\int x \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = (x-1) \sqrt{e^{2x}-1} + \arctan \sqrt{e^{2x}-1} + C.$$

(B) si ha

$$\int_{\varepsilon}^1 x \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = F(1) - F(\varepsilon)$$

$$\text{dove } F(x) = (x-1) \sqrt{e^{2x}-1} + \arctan \sqrt{e^{2x}-1}.$$

noto che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(\varepsilon) = 0$ quindi

il limite vale $F(1) = \arctan \sqrt{e^2-1}$.

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{\log(e^{2x} - 1)}\right)$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f , i *limiti notevoli* di f , gli eventuali asintoti.

dominio: $\log(e^{2x} - 1) \neq 0$ ed $e^{2x} - 1 > 0$
 da cui $x > 0$ con $x \neq \frac{1}{2} \log 2 = \log \sqrt{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(e^{2x} - 1) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(e^{2x} - 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \log \sqrt{2}^+} \log(e^{2x} - 1) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \log \sqrt{2}^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \log \sqrt{2}^-} \log(e^{2x} - 1) = 0^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \log \sqrt{2}^-} f(x) = 0.$$

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

La derivata in $]0, +\infty[\setminus \{\log \sqrt{2}\}$ è

$$f'(x) = - \frac{2 e^{2x}}{(e^{2x} - 1) \log^2(e^{2x} - 1)} e^{\frac{1}{\log(e^{2x} - 1)}}$$

sempre negativa! $\leftarrow$ sul dominio

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} - \frac{2}{y \log^2 y} e^{\frac{1}{\log y}}$$

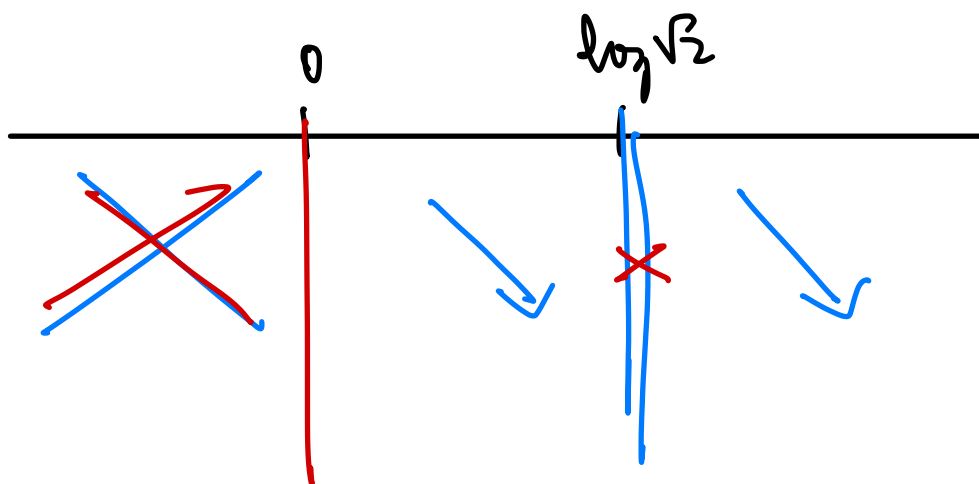
$y = e^{2x} - 1$

$$z = \frac{1}{\log y} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0^-} -2 e^z \cdot z^2 \cdot e^{-\frac{1}{z}} = -\infty$$

Similmente si vede $\lim_{x \rightarrow \log \sqrt{2}^-} f'(x) = 0$

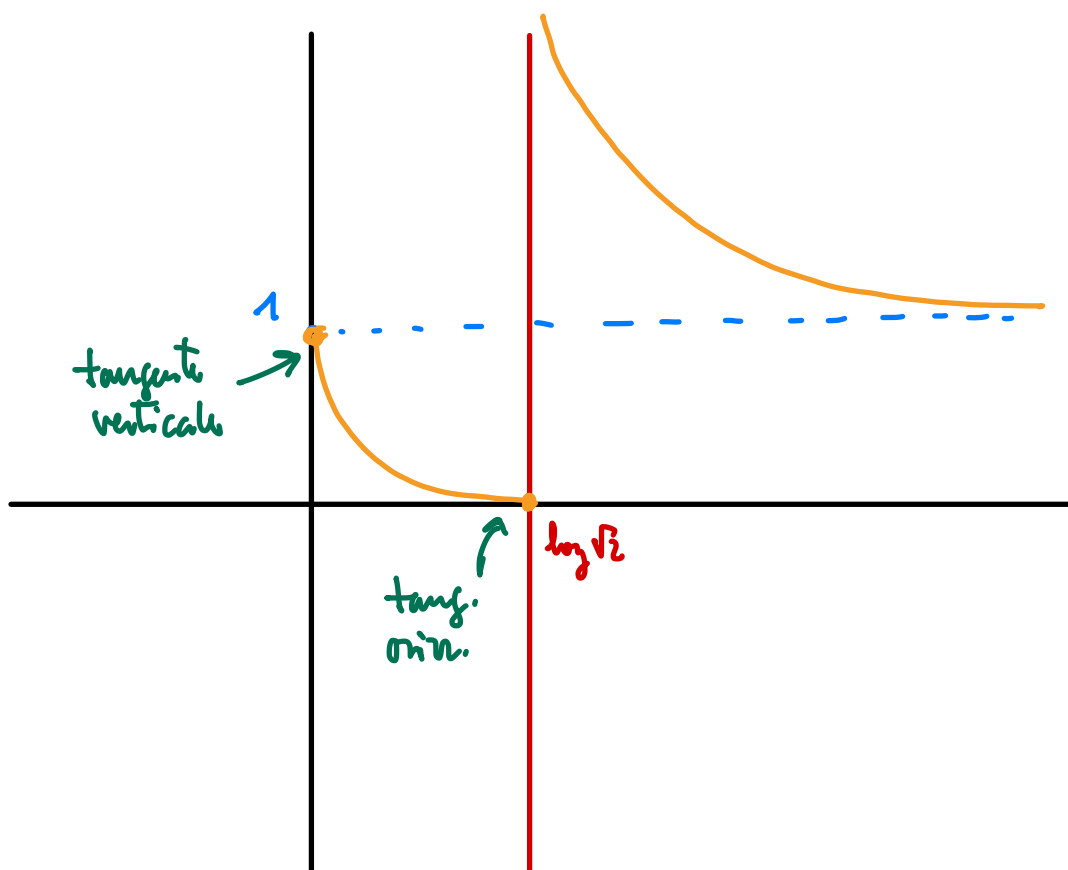
ho usato
che $e^{2x} \rightarrow 1$
 $x \rightarrow 0^+$
cio tolgo
dal limite
di $f'(x)$.

- il segno della derivata, gli intervalli di monotonia di f , i punti di estremo locale e la loro natura:



$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[\setminus \{\log \sqrt{2}\}.$$

- tracciare il grafico qualitativo di f :



Alumni commenti:

- non è vero che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ammette una sottosucc. convergente $\Leftrightarrow$ è limitata.
vale solo $\Leftarrow$ mentre $\Rightarrow$ FALSO.
- non è vero che il rapporto di succ. limitate è limitato.
- se una funzione è derivabile su tutto il dominio è importante controllare la derivata ai bordi del dominio

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

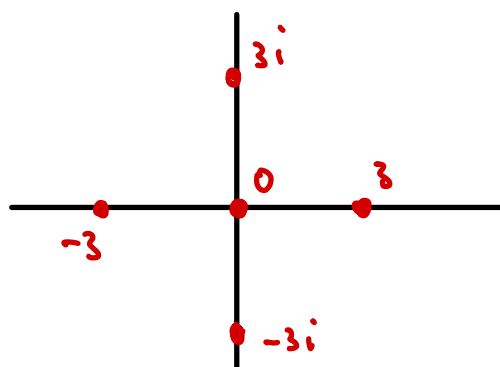
1) Determinare tutte le soluzioni complesse della equazione

$$z^4 - 9|z|^2 = 0$$

$$z = R e^{i\theta} \Rightarrow R^4 e^{i4\theta} = 9 R^2 \Rightarrow \begin{cases} R^4 = 9 R^2 \\ 4\theta = 2k\pi \end{cases}$$

2) Disegnare le soluzioni nel piano complesso.

$$R=0 \quad \text{oppure} \quad R=3 \\ \theta = \frac{\pi}{2} k$$



$$k=0, 1, 2, 3$$



$$z_0 = 0$$

$$z_1 = 3$$

$$z_2 = 3i$$

$$z_3 = -3$$

$$z_4 = -3i$$

Esercizio 4 [con svolgimento, 6 punti]

(i) Sia $\alpha > 0$. Scrivere lo sviluppo di Taylor di grado 4 in $x_0 = 0$ della funzioni seguenti

$$f(x) = e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x$$

$$g(x) = \log(1 - \sin x)$$

(ii) Calcolare in funzione di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \log(1 - \sin x) - 1}{x(e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x)} = L$$

sviluppando opportunamente

$$f(x) = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{2}\right)x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \left(\frac{1 - \alpha^4}{24}\right)x^4 + o(x^4)$$

$$e^x + \log(1 - \sin x) - 1 = -\frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

da cui il limite:

$$\text{per } \alpha \neq 1 \quad L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{24} + o(x^4)}{\frac{\alpha^2 - 1}{2}x^3 + o(x^3)} = 0$$

$$\text{per } \alpha = 1 \quad L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{24} + o(x^4)}{-\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}$$

$$L = \frac{1}{24} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{16}$$