

Analisi Matematica 1, 27/08/24

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.

1. Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, dimostrare che se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$$

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = L + M$.

4. Enunciare il teorema di Weierstrass. Fornire, se esiste, un esempio in cui una delle ipotesi del teorema non è verificata ma la conclusione resta vera.
3. Per una $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dare la definizione di funzione iniettiva, suriettiva e biunivoca.
4. La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + 2 \sin(x)$ è biunivoca? Giustificare la risposta.

Analisi Matematica 1, 27/08/24

Parte di esercizi.

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 8 punti]

(i) Calcolare lo sviluppo di Taylor di grado 4 in $x_0 = 0$ della funzione seguente, spiegando i passaggi in maniera dettagliata:

$$f(x) = \log(1 + \sin(x))$$

(ii) Sfruttando opportunamente il risultato al punto precedente, calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \log \left(1 + \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = (x^2 - x)e^{-\frac{1}{x}}$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f .

$D =$

- i *limiti notevoli* di f :

○

○

○

- gli eventuali asintoti e la loro tipologia

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata e gli intervalli di monotonia di f :
- i punti di estremo locale e la loro natura:
- tracciare il grafico qualitativo di f :
- l'immagine della funzione e gli eventuali punti di estremo globale.
 $f(D) =$

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

(i) Scrivere tutte le soluzioni della equazione differenziale

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0 \quad (1)$$

(ii) Trovare tutte le soluzioni della equazione differenziale

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 3e^{-x} \quad (2)$$

(iii) Trovare, se esiste, la soluzione della equazione differenziale (2) tale che $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

Esercizio 4 [senza svolgimento, 4 punti]

1) Determinare tutte le primitive di

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{2x}}$$

2) determinare quella primitiva F di f tale che $F(0) = \log 2$.