

Analisi Matematica 1, 27/08/24

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: 40 minuti.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.

1. Dimostrare che la disuguaglianza $3^n \geq n^2$ è verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$.
2. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e siano $x_0, L \in \mathbb{R}$. Scrivere le definizioni seguenti
 - a. f non è continua in x_0 ,
 - b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.
3. Enunciare il teorema di Rolle e dimostrarlo.
4. Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua dire se la seguente affermazione è vera o falsa e giustificare
se $f(x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$, allora f è derivabile in 0 e vale $f'(0) = 0$.

4. La funzione $\bar{f}$ è derivabile in
quanto esiste

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x + o(x) = 0\end{aligned}$$

dove si osserva che $f(0) = 0$

in quanto f è continua dunque

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Analisi Matematica 1, 27/08/24

Parte di esercizi.

Cognome Nome Matr.
 Corso di studi Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 8 punti]

(i) Calcolare lo sviluppo di Taylor di grado 6 in $x_0 = 0$ della funzione seguente:

$$f(x) = \sin^2(\sqrt{2}x)$$

(ii) Determinare il termine principale della funzione (ovvero trovare $c, \gamma \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ tale che si abbia)

$$(1 + x^\gamma)^x - 1 = cx^\gamma + o(x^\gamma), \quad x \rightarrow 0$$

(ii) Calcolare in funzione di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2x) + \sin^2(\sqrt{2}x) - 1}{(1 + x^\alpha)^x - 1}$$

$$(i) \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + o(z)$$

$$\sin \sqrt{2}x = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}^3 x^3}{3!} + \frac{\sqrt{2}^5 x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\sin^2(\sqrt{2}x) = \left(\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}^3 x^3}{3!} + \frac{\sqrt{2}^5 x^5}{5!} + o(x^5) \right)^2$$

$$= 2x^2 - 2 \cdot \frac{2^2 x^4}{3!} + 2 \cdot \frac{2^3 x^6}{5!} + \frac{2^3 x^6}{(3!)^2} + o(x^6)$$

$$= 2x^2 - \frac{8}{6} x^4 + \frac{16}{120} x^6 + \frac{8}{36} x^6 + o(x^6)$$

$$= 2x^2 - \frac{4}{3} x^4 + \frac{16}{45} x^6 + o(x^6)$$

$$(1+x^7)^x = e^{x \log(1+x^7)}$$

$$\text{donque } x \log(1+x^7) = x^8 + o(x^8)$$

$$\text{in quanto } \log(1+y) = y + o(y) \text{ per } y \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{allora } (1+x^7)^x - 1 &= e^{x^8 + o(x^8)} - 1 \\ &= x^8 + o(x^8) \end{aligned}$$

$$\text{quindi } c=1 \quad \gamma=8.$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2x) + \sin^2(\sqrt{2}x) - 1}{(1+x^\alpha)^\alpha - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cos(2x) - 1) + \sin^2(\sqrt{2}x)}{x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4) + (2x^2 - \frac{4}{3}x^4) + o(x^4)}{x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1})} = \begin{cases} 0 & \alpha < 3 \\ \frac{4}{3} & \alpha = 3 \\ +\infty & \alpha > 3 \end{cases}$$

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \tan\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}, \quad x \in [-1, 3]$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato con i calcoli necessari a una minima giustificazione rispettando gli spazi):

- il dominio (o dominio naturale) D di f .

$$D = \text{notare che per } x \in [-1, 3] \Rightarrow \frac{\pi}{2}(x-1) \in [-\pi, \pi]$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}} \Rightarrow \frac{\pi}{2}(x-1) \text{ deve stare tra }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

quindi $D =]0, 2[$

- i limiti notevoli di f :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

- gli eventuali asintoti e la loro tipologia

asintoti verticali nei punti sopra.

Denoto $y = \frac{\pi}{2}(x-1)$ e noto $\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{2}$

allora $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{\pi/2}{2 \sqrt{\frac{\sin^2(y)}{\cos(y)}}} \cdot \frac{2 \sin(y) \cos^2(y) + \sin^3 y}{\cos^2(y)}$

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

la derivata non è def. per $y=0$
ovvero $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$$

- i limiti notevoli della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata e gli intervalli di monotonia di f :

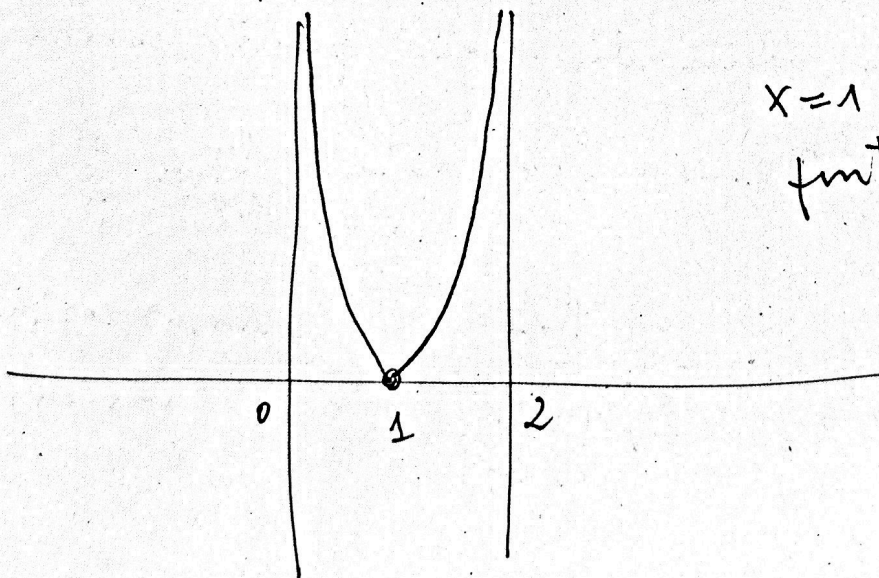
$$f'(x) < 0 \quad \text{in} \quad]0, 1[$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{in} \quad]1, 2[$$

- i punti di estremo locale e la loro natura:

$$x=1 \quad \text{min globale}$$

- tracciare il grafico qualitativo di f :



$x=1$
punto angoloso

- l'immagine della funzione e gli eventuali punti di estremo globale.
 $f(D) =$

$$[0, +\infty[$$

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

(i) Classificare e risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \tan(x)y^2(x), \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

per il valore $x_0 = 2$.

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \tan x \, dx \Rightarrow -\frac{1}{y(x)} = -\frac{\log(\cos x) + C}{1}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \log(\cos x)}$$

(ii) Trovare tutti i valori $x_0 \in \mathbb{R}$ per i quali la soluzione di (1) ha un asintoto verticale.

$x_0 =$ in generale $\log(\cos x) \leq 0$

e $y(x) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \log(\cos x)}$

quindi deve essere $x_0 > 0$.

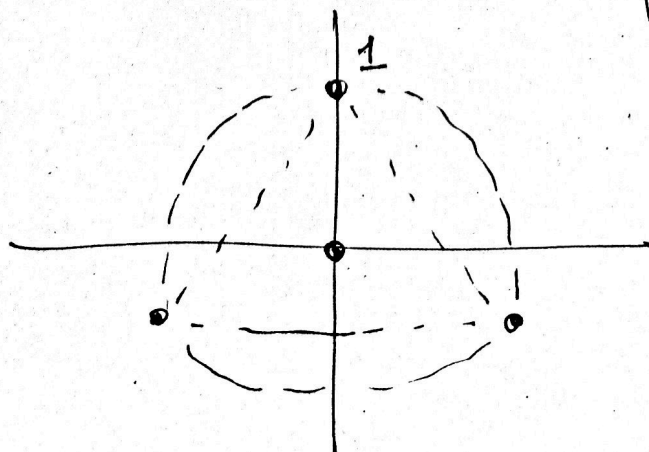
Esercizio 4 [senza svolgimento, 4 punti]

1) Determinare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ della equazione

$$w^2 + i\bar{w} = 0$$

$$z = 0 \quad z = i \quad z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

2) Disegnare nel piano complesso



(Sono $z=0$
più 3 soluzioni
nel cerchio
di raggio 1)