

Analisi Matematica 1, 27/08/24

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

Tema A

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.

1. Dimostrare che la disuguaglianza $3^n \geq n^2$ è verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$.
2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e siano $x_0, L \in \mathbb{R}$. Scrivere le definizioni seguenti
 - a. f non è continua in x_0 ,
 - b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.
3. Enunciare il teorema di Rolle e dimostrarlo.
4. Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua dire se la seguente affermazione è vera o falsa e giustificare
se $f(x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$, allora f è derivabile in 0 e vale $f'(0) = 0$.

Analisi Matematica 1, 27/08/24

Parte di esercizi.

Cognome Nome Matr.
Corso di studi Docente del corso

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Tema A

Esercizio 1 [con svolgimento, 8 punti]

(i) Calcolare lo sviluppo di Taylor di grado 6 in $x_0 = 0$ della funzione seguente:

$$f(x) = \sin^2(\sqrt{2}x)$$

(ii) Determinare il termine principale della funzione (ovvero trovare $c, \gamma \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ tale che si abbia)

$$(1 + x^7)^x - 1 = cx^\gamma + o(x^\gamma), \quad x \rightarrow 0$$

(ii) Calcolare in funzione di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos(2x) + \sin^2(\sqrt{2}x) - 1}{(1 + x^\alpha)^x - 1}$$

Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \tan\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}, \quad x \in [-1, 3]$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*) D di f .

$D =$

- i *limiti notevoli* di f :

○

○

○

- gli eventuali asintoti e la loro tipologia

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata e gli intervalli di monotonia di f :
- i punti di estremo locale e la loro natura:
- tracciare il grafico qualitativo di f :
- l'immagine della funzione e gli eventuali punti di estremo globale.
 $f(D) =$

Esercizio 3 [senza svolgimento, 4 punti]

(i) Classificare e risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \tan(x)y^2(x), \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

per il valore $x_0 = 2$.

(ii) Trovare tutti i valori $x_0 \in \mathbb{R}$ per i quali la soluzione di (1) ha un asintoto verticale.

$x_0 =$

Esercizio 4 [senza svolgimento, 4 punti]

1) Determinare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ della equazione

$$w^2 + i\overline{w} = 0$$

2) Disegnare nel piano complesso